

- 9.1) Nella retta proiettiva reale numerica, considera i punti $A[1, 2]$, $B[3, -1]$, $C[-3, -1]$, $D[6, -2]$.
Discuti quali di tali punti sono distinti tra loro.
- 9.2) Considera il piano proiettivo \mathbf{P}_K^2 .
- a) Discuti se il punto $[4, -1, 2]$ appartiene al sottospazio di equazione omogenea $2X_1 + X_2 = 0$.
 - b) Determina un sistema di punti indipendenti che generano il sottospazio di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$.
 - c) Determina una equazione omogenea per la retta passante per $[1, 0, 3]$ e per $[2, 1, -1]$ e una rappresentazione parametrica di tale retta.
 - d) Determina la dimensione dell'intersezione tra i sottospazi di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$ e $X_0 - 4X_2 = 0$, rispettivamente. Descrivi, inoltre, le coordinate omogenee dei punti in tale intersezione.
 - e) Verifica che i punti $A[1, 0, 7]$, $B[2, -1, 5]$, $C[4, -3, 1]$, $D[3, -1, 12]$ sono allineati e determina una equazione omogenea della retta proiettiva r che li contiene.
- 9.3) In \mathbf{P}_K^3 , sia H_1 il sottospazio di equazioni $3X_0 + X_3 = 0, 2X_1 + 3X_3 = 0, 9X_0 - 2X_1 = 0$.
- a) Determina la dimensione di H_1 , un sistema di equazioni normali per H_1 ed il sottospazio vettoriale associato.
 - b) Discuti se H_1 è sghembo rispetto al sottospazio H_2 di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$.
 - c) Discuti se H_1 è sghembo rispetto a H_3 di equazioni $X_0 - X_2 = 0, X_2 - X_3 = 0$.
- 9.4) In \mathbf{P}_R^3 , sia H l'intersezione tra i sottospazi di equazione $X_0 - X_1 + X_3 = 0$ e $2X_0 - X_2 - X_3 = 0$, rispettivamente
- a) Determina la dimensione di H e una base del sottospazio W di $V = \mathbf{R}^4$ tale che $H = \mathbf{P}(W)$.
 - b) Determina un insieme massimale di punti indipendenti in H .
 - c) Determina una biezione tra $\mathbf{P}(V/W)$ e la stella di piani di centro H .
- 9.5) Nello spazio proiettivo \mathbf{P}_K^3 , determina l'equazione omogenea di un piano che contenga i punti $A[1, 0, 1, 0]$, $B[-1, -1, 0, 5]$, $C[4, 0, 0, 1]$. Controlla se tale piano contiene il punto $D[-8, -2, 2, 8]$.
- 9.6) Nel piano proiettivo numerico reale, considera i punti $A[1, 0, 1]$ e $B[3, 6, -3]$. Considera, inoltre, la proiettività φ associata all'applicazione $\varphi_l : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\varphi_l(X_1, X_2, X_3) = (2X_1 + X_2, X_1 - X_2 + X_3, X_1 + X_2)$.
- a) Determina equazione omogenea ed equazioni parametriche della retta r passante per $A[1, 0, 1]$ e $B[3, 6, -3]$.
 - b) Determina l'equazione del fascio di rette per A .
 - c) Determina l'immagine di A, B, r rispetto alla proiettività φ e equazioni parametriche dell'immagine di r tramite φ .
 - d) Determina l'equazione omogenea dell'immagine tramite φ della retta s di equazione $X_1 + X_1 + X_3 = 0$.