9.1) In $\mathbf{R}_{\leq 3}[x]$, determina un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio U generato da $p_1 = 1 - x^3$, $p_2 = -1 + x + x^2 + x^3$, $p_3 = 1 + x + x^2$.

9.2) In $\mathbf{R}^4$, considera il sottospazio U di equazioni $2x_2 - x_4 = 0$ e il sottospazio W di equazioni

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Determina la dimensione e una base di $U + W$ (rispettivamente, di $U \cap W$).

b) Determina una base di U che contiene la base di $U \cap W$ individuata al punto precedente.

c) Determina la dimensione e una base di $Z + W$ (rispettivamente, di $Z \cap W$), ove Z sia il sottospazio generato da $\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{z}_2 = (0, 1, 0, 1), \mathbf{z}_3 = (0, 0, 1, 0)$.

9.3) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$, considera i sottospazi U generato da

$$\mathbf{u}_1 = (2, -1, 3, 4), \mathbf{u}_2 = (-1, -5, 5, 1),$$

e W generato da

$$\mathbf{w}_1 = (1, -1, 0, 2), \mathbf{w}_2 = (-2, 2, 0, 4), \mathbf{w}_3 = (8, 0, 1, 13).$$

a) Determina la dimensione e una base di U, W, $U + W$, $U \cap W$, rispettivamente.

b) Determina la dimensione e una base dell'intersezione $W \cap Z$, ove Z sia il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

9.4) Al variare del parametro reale k, discuti la compatibilità del sistema in 3 incognite a coefficienti reali:

$$\begin{cases} (k+1)x + 5y = -1 \\ (-2k+2)x + ky = 1 \\ 4x + (10+k)y = -1 \end{cases}$$

9.5) Considera le matrici quadrate

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Per ciascuna di esse, mostra che è stata ottenuta dalla matrice identica I di ordine 4 tramite una trasformazione elementare sulle righe.

b) Sia A una matrice quadrata di ordine 4. Determina E_iA, AE_i per $i = 1, 2, 3$.

9.6) Considera la matrice identica I di ordine n e opera su di essa una trasformazione elementare di prima specie sulle righe ottenendo una matrice E. Considera inoltre una matrice quadrata A di ordine n.

a) Chi sono EA e AE?

b) Se E' è ottenuta da I mediante un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe. Cosa puoi dire di EA e AE?

9.7) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V.

a) Mostra che $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ è il più piccolo sottospazio di V contenente sia U che W.

b) Mostra che $U + W = U$ se e solo se $W \leq U$.