8.1) In $\mathbf{R}^2$ dotato della topologia euclidea, considera i sottoinsiemi

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)|0 < x < 1, y = 0\} \cup \{(x,y)|0 < x < 1, y = 1\} \\ A_n &= \{(x,y)|0 < x < 1/n, 0 \le y \le 1\} \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ X_n &= A_n \cup A \quad \forall n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Mostra che la famiglia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ gode delle proprietà:

a) $X_n \supset X_{n+1}$;

b) X_n è connessso ogni $n \geq 1$;

c) $\cap X_n$ è non vuoto e non connesso.

8.2) Determina il numero delle componenti connesse di ciascuno dei seguenti sottospazi del piano euclideo:

a) $S_1 = \{(x,y) \,|\, xy \neq 0\}$;

b)$S_2 = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \neq 1\}$;

c) $S_1 \cap S_2$.

8.3) Mostra che $\mathbf{R}$, dotato della topologia delle semirette aperte illimitate a sinistra, soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

8.4) Uno spazio topologico X si dice *irriducibile* se non è unione di due suoi chiusi propri.

a) Mostra che ogni insieme infinito, dotato della topologia cofinita, è irriducibile.

b) Mostra che in $\mathbf{C}^n$, dotato della topologia di Zariski, due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota, e lo spazio è irriducibile (ricorda che i chiusi della topologia di Zariski sono i sottoinsiemi $V(S) = \{\vec{x}|f(\vec{x}) = 0 \forall f \in S\}$, al variare di $S \subseteq \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$).

8.5) Mostra che la topologia di Zariski su $\mathbf{R}^2$ è meno fine della topologia euclidea, ma più fine della topologia cofinita. Deduci che $\mathbf{R}^2$, con la topologia di Zariski, è separabile.

8.6) Considera lo spazio topologico X costituito dall'insieme dei numeri reali, dotato della topologia avente per base $\{(a,b] \,|\, a,b \in \mathbf{R}, a < b\}$.

a) Mostra che X è totalmente sconnesso.

b) Mostra che $X \times X$ è separabile.

c) Verifica che $X \times X$ induce la topologia discreta su $S = \{(x,-x) \,|x \in \mathbf{R}\}$. Deduci che S non è separabile e che un sottospazio di uno spazio separabile può non essere separabile.

d) Mostra che in $X \times X$ esistono rette tra loro non omeomorfe.

8.7) Siano assegnati spazi topologici X, Y_1 e Y_2 e applicazioni $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$. Considera l'applicazione $\Psi : X \to Y_1 \times Y_2$ definita da $\Psi(x) = (f_1(x), f_2(x))$ $\forall x \in X$. Mostra che se Ψ è aperta anche f_1 e f_2 sono aperte, ma il viceversa è falso. (sugg.: puoi trovare un controesempio con $X = Y_1 = Y_2 = [0,1]$ con topologia indotta dalla topologia euclidea)

8.8) a) Mostra che, se gli spazi topologici X e Y hanno la topologia discreta, la topologia prodotto su $X \times Y$ è la topologia discreta.

b) Mostra che se X, Y e Z sono spazi topologici tali che $X \times Z$ è omeomorfo a $Y \times Z$, non possiamo concludere che X e Y sono omeomorfi. (sugg: prova utilizzando come Z i numeri interi, con topologia discreta)