Endomorfismi e diagonalizzabilità

Nota: ripassare l'algoritmo di divisione tra polinomi in una indeterminata

8.1) Considera l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è definito da $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y + z, 2x + y + z)$.

a) Determina la dimensione ed una base di Ker f e Im f.

b) Determina la matrice $\mathbf{B}$ associata a f nella base $\mathbf{v}_1 = (3, -5, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$.

c) Osservando la matrice $\mathbf{B}$, verifica se il sottospazio generato da $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ è f-invariante.

8.2) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ definita da $f(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(\mathbf{e}_2) = (1, 2, 0, 1)$, $f(\mathbf{e}_3) = (-1, 0, 2, 0)$, $f(\mathbf{e}_4) = (1, 1, 0, 1)$. Sia $\mathbf{W}$ il sottospazio generato da $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$.

a) Mostra che $f(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$.

b) Determina la matrice B di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$.

8.3) In uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, considera sottospazi non nulli $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_r$ $(r \geq 3)$.

a) Mostra che la somma $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_r$ è diretta se e solo se la somma $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ è diretta, e inoltre $(\mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_{j-1}) \cap \mathbf{U}_j = \{\mathbf{0}\}$ per ogni $3 \leq j \leq r$.

b) Supponi che la somma $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_r$ sia diretta. Mostra che ogni vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{U}$ si scrive in modo unico $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_r$ come somma di vettori tali che $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i \; \forall i$.

8.4) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (5x + 2z, y, 2x + 2z).$$

a) Verifica che $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinane il corrispondente autovalore a.

Determina la dimensione e una base $\mathcal{B}_a$ dell'autospazio S_a relativo all'autovalore a.

b) Osserva la matrice A associata a f in base canonica, e deduci (guardando la matrice e senza fare ulteriori conti) che 1 è un autovalore per f. Determina la dimensione e una base $\mathcal{B}_1$ dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

c) Calcola il polinomio caratteristico della matrice A e verifica che f non ha autovalori diversi da quelli già trovati.

d) Discuti se f è diagonalizzabile.

Soluzione: a) $f(\mathbf{v}) = 6\mathbf{v}$: dunque $\mathbf{v}$ è autovettore di autovalore 6. La matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ in dominio e codominio è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

So già che 6 è un autovalore per f. L'autospazio S_6 di autovalore 6 è $Ker(f - \omega_6)$; poichè la matrice A è associata a f in base canonica, S_6 è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo avente per matrice dei coefficienti

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 5-6 & 0 & 2 \\ 0 & 1-6 & 0 \\ 2 & 0 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poiché rg $(A-6I)=2$, si ricava che S_6 ha dimensione $3-2=1$, ed è dunque generato da $\mathbf{v}_1=(2,0,1)$. In particolare, ricaviamo che l'autovalore 6 ha molteplicità geometrica 1.

b) Guardando la seconda colonna della matrice A (che risulta essere multiplo scalare di $\mathbf{e}_2$), si vede che $\mathbf{e}_2$ è un autovettore, di autovalore 1. Dalla matrice

$$A-I=\begin{pmatrix} 5-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si ricava che l'autospazio $V_1=Ker(f-I)$ ha dimensione 1 ed è generato da $\mathbf{v}_2=\mathbf{e}_2$. In particolare, l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1.

c) Il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f ha grado 3 ed è divisibile per $(6-t)$ e per $(1-t)$; risulta pertanto interamente fattorizzabile; il fattore mancante si ricava osservando che la somma delle radici di $p_f(t)$ (contando le molteplicità) è la traccia di A: l'autovalore 1 ha dunque molteplicità algebrica 2.

Altrimenti, potevamo calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ direttamente dalla matrice:

$$p_f(t)=det\begin{pmatrix} 5-t & 0 & 2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 2 & 0 & 2-t \end{pmatrix}=(1-t)[(5-t)(2-t)-4]=(1-t)[t^2-7t+6].$$

Poiché $p_f(t)=(1-t)^2(t-6)$, l'applicazione f ha spettro reale e autovalori: $t_1=6$ con molteplicità algebrica (e geometrica) 1, $t_2=1$ con molteplicità algebrica uguale a 2 (e molteplicità geometrica 1 per quanto visto al punto precedente).

In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è strettamente minore della molteplicità algebrica. Poichè per l'autovalore 1 di f molteplicità algebrica e geometrica non coincidono, l'applicazione f non è diagonalizzabile.

8.5) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da: $f(x,y,z)=(x,2x-2y-2z,2x-3y-z)$.

a) Determina, se è possibile, un riferimento R di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D=M_R(f)$ di f nel riferimento R sia diagonale.

b) Sia A la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare una matrice invertibile P tale che, $D=P^{-1}\,A\,P$.

Soluzione: a) La matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è:

$$p_f(\lambda)=det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda)^2\,(-\lambda-4).$$

Dunque f ha due autovalori: $\lambda_1=1$, di molteplicità algebrica uguale a 2, e $\lambda_2=-4$, di molteplicità algebrica uguale a 1. In particolare, il polinomio caratteristico di f si scompone come prodotto di fattori lineari in $\mathbf{R}$ e lo spettro di f è contenuto in $\mathbf{R}$. Affinché f sia diagonalizzabile, occorre mostrare che molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore. Sicuramente ciò accade per $\lambda_2=-4$, perché la sua molteplicità algebrica è 1. La molteplicità geometrica di $\lambda_1=1$ è per definizione uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente $S_1=ker(f-\omega_1)$ ed è quindi uguale a $3-rg(A-I)$. Ora

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è pari a 2 ed è uguale alla sua molteplicità algebrica. Dunque f è diagonalizzabile.

Un riferimento R rispetto al quale la matrice associata a f sia diagonale è un qualunque riferimento di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per f. Per determinare un tale riferimento R, determiniamo separatamente un riferimento per ciascun autospazio: il riferimento R sarà l'unione dei riferimenti degli autospazi (con un ordine assegnato). Cerchiamo quindi una base dell'autospazio S_1 relativo all'autovalore 1 ed una dell'autospazio S_{-4} relativo all'autovalore -4, poi ne prendiamo l'unione. Poichè la matrice A è rita alla base canonica, lo spazio S_1 è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente all'equazione $2x_1 - 3x_2 - 2x3 = 0$. Dunque

$$S_1 = \{(3h + 2k, 2h, 2k) | h, k \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da $\mathbf{v_1} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$.

L'autospazio S_{-4} è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A + 4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema $x_1 = 0, x_2 = x_3$. Dunque

$$S_{-4} = \{(0, h, h) | h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da $\mathbf{v_3} = (0, 1, 1)$. Il riferimento $R = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ soddisfa le richieste e

$$M_R(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(l'ordine in cui gli autovalori compaiono sulla diagonale corrisponde all'ordine con cui sono stati elencati i vettori nel riferimento)

b) Poiché A rappresenta f rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio, posto $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ e $f(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, si ha che $\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$.

Sia C la matrice le cui colonne sono formate dalle coordinate dei vettori del riferimento R di autovettori scelto nel punto precedente:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione, C è la matrice associata all'identità di $\mathbf{R}^3$, ove si consideri il riferimento R nel dominio, e la base canonica nel codominio: se $\mathbf{v} = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, si ha che $C\,\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. D'altra parte, se si scrive $f(\mathbf{v}) = y'_1\mathbf{v}_1 + y'_2\mathbf{v}_2 + y'_3\mathbf{v}_3 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, vale analoga relazione $C\,\mathbf{y}' = \mathbf{y}$. Poichè la matrice D rappresenta f nel riferimento R, si ha anche che $\mathbf{y}' = D\,\mathbf{x}'$.

Dalla relazione $\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$ segue quindi che $C\,\mathbf{y}' = A\,C\,\mathbf{x}'$ e $D = C^{-1}\,A\,C$. Dunque, la matrice $P = C$ soddisfa le richieste.

8.6) Considera la matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determina gli autospazi di B ed una loro base. Discuti se B è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.

Soluzione La terza colonna di B è multiplo scalare del terzo vettore $\mathbf{e}_3$ della base canonica. Dunque $\mathbf{e}_3$ è un autovettore, e il suo autovalore è -4 (trovato osservando la matrice). Poichè nell'ultima riga compare solo l'elemento diagonale 2, possiamo concludere che anche 2 è un autovalore per f; non è però evidente dalla matrice chi sia un corrispondente autovettore.

Una strategia possibile è quella di cercare subito le molteplicità geometriche degli autovalori trovati (cercando, in questo modo, di fattorizzare il polinomio caratteristico. In alternativa, si procede calcolando in modo diretto il polinomio caratteristico.

Il polinomio caratteristico $p_B(\lambda)$ di B è:

$$det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-4-\lambda) det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^2(4+\lambda)^2$$

Gli autovalori di B sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -4$ ed entrambi hanno molteplicità algebrica 2.

L'autospazio S_2 relativo all'autovalore 2 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} S_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = -x_2, x_3 = 0, x_4 = 0\} = \\ &= \{(h, -h, 0, 0) | h \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari a 1, mentre la molteplicità algebrica è 2: dunque la matrice B non è diagonalizzabile.

L'autospazio S_{-4} è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$V(B, -4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_3 = x_4 = 0\} = \{(0, 0, h, 0) | h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore -4 è pari a 1, fornendo una ulteriore motivazione a che la matrice B non è diagonalizzabile.

8.7) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).

b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per $h = -1$, mostra che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile: determina una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori (per l moltiplicazione a sinistra per A) e una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$.

8.8) Dimostra che non esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{e}_1$ e $(2, 5)$ siano autovettori di autovalore 2, mentre $\mathbf{e}_2$ sia autovettore di autovalore 3.

Soluzione I vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $(2, 5)$ sono a due a due linearmente indipendenti: dunque, se l'endomorfismo cercato esistesse, l'autovalore 2 avrebbe molteplicità geometrica ≥ 2, e dunque molteplicità algebrica ≥ 2. Ma la molteplicità algebrica di 2 deve essere 1, perchè il dominio ha dimensione 2 e f ha almeno due autovalori distinti, in base alle ipotesi.

8.9) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

8.10) Determinare autovettori, la relativa molteplicità algebrica e una base dei relativi autospazi per le seguenti applicazioni lineari:

$$f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, -x_1 + 7x_2),$$

$$g \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = (0, 2x_1 + x_2 + 6x_3, -2x_1 - x_2 - 4x_3),$$

$h \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, h(\vec{x}) = (5x_1 + 12x_2 - 6x_3, -3x_1 - 7x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3)$(sapendo che -1 è un autovalore).