

- 8.1) Nel piano proiettivo numerico reale, considera i punti $A[1, 0, 1]$, $B[1, 1, 0]$ e $C[0, 1, 1]$. Considera, inoltre, la proiettività $\varphi : \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$, $\varphi[X_0, X_1, X_2] = [X_0 - X_1, X_0 + X_1 + X_2, X_0 + 2X_2]$.
- Determina una matrice A che rappresenta φ .
 - Determina le coordinate omogenee di $\varphi(A)$, di $\varphi(B)$ e di $\varphi(C)$ (rispettivamente), e controlla che questi punti sono indipendenti.
 - Determina equazioni parametriche per l'immagine, tramite φ , della retta per A e per C .
 - Determina equazioni parametriche di una retta la cui immagine, tramite φ , sia r .
- 8.2) Nel piano proiettivo numerico reale, considera i punti $A[2, 0, 1]$, $B[1, 1, 1]$, la retta r per A e B e la retta s di equazione $X_0 + X_1 - X_2 = 0$. Considera, inoltre, la proiettività φ associata all'applicazione $\varphi_l : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\varphi_l(X_0, X_1, X_2) = (4X_0 + 2X_1 - 2X_2, -3X_0 - 7X_1 + 6X_2, -2X_0 - 8X_1 + 7X_2)$.
- Determina l'equazione omogenea dell'immagine di $\varphi(s)$.
 - Determina le coordinate omogenee di $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ (rispettivamente) e equazioni parametriche di $\varphi(r)$.
 - Per ogni punto P della retta t di equazione $X_0 = 0$, denota con r_P la retta per A e per P . Definisci $\psi(P) = t \cap \varphi(r_P)$. Determina le coordinate di $\psi(P)$ e mostra che $\psi : t \rightarrow t$, $P \mapsto \psi(P)$ è una proiettività della retta t in se stessa.
 - Determina le coordinate del punto Q di intersezione di r e s (e tra $\varphi(r)$ e $\varphi(s)$, rispettivamente). Il punto Q è fisso per φ (cioè coincide con la propria immagine)?
- 8.3) In $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$, considera i punti: $P_0[1, 1]$, $P_1[2, 1]$, $P_2[1, 0]$, $P_3[0, 1]$.
- Verifica che i punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale.
 - Determina equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ tale che $\varphi([1, 0]) = P_0$, $\varphi([0, 1]) = P_1$, $\varphi([1, 1]) = P_2$. Descrivi φ come trasformazione di Moebius, considerando $[0, 1]$ come punto all'infinito.
 - Determina equazioni per la proiettività $\psi : \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ tale che $\psi(P_0) = [1, 0]$, $\psi(P_1) = [0, 1]$, $\psi(P_3) = [1, 1]$.
- 8.4) In $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$, verifica che sono in posizione generale i punti: $P_0[1, 3, 0]$, $P_1[1, 0, 1]$, $P_2[0, 2, 0]$, $P_3[0, 0, 5]$. Determina, inoltre, equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ tale che $\varphi([1, 0, 0]) = P_1$, $\varphi([0, 1, 0]) = P_2$, $\varphi([0, 0, 1]) = P_3$, $\varphi([1, 1, 1]) = P_4$.
- 8.5) Nel piano proiettivo numerico $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$, considera le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - 2X_2 = 0$ e $s : X_0 + 5X_1 = 0$ rispettivamente. Determina un cambio di coordinate omogenee $[\vec{Y}] = [M\vec{X}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.
- 8.6) Determina le equazioni di una proiettività non identica $\varphi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ tale che il punto $P[1, 0, 1]$ sia fisso e la retta r di equazione $X_1 + X_2 = 0$ sia fissa punto a punto.