Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2013-14 ottava settimana

8.1) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1+3x_2+x_3, x_1-2x_2)$ (risp., $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $g(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + 6x_2 - 8x_3, x_2, 2x_1 - 3x_2 + 5x_3)$.

Discuti se f (risp. g) è diagonalizzabile e, in caso positivo, determina una base di autovettori f (risp. g).

8.2) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_2, 3x_2, 2x_1 + 4x_2 - x_3)$.

a) Determina una base di autovettori per f.

b) Determina una base per il quoziente di $\mathbf{R}^3$ modulo l'autospazio di autovalore -1.

8.3) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

a) Considera due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ in V. Mostra che le due classi $[\mathbf{v}_1]$ e $[\mathbf{v}_2]$ sono linearmente indipendenti in V/W se e solo se Span $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e W sono in somma diretta.

b) Dimostra che $[\mathbf{v}_1]$, $[\mathbf{v}_2]$, …, $[\mathbf{v}_n]$ sono linearmente indipendenti se e solo se $< [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_n] >$ e W sono in somma diretta, cioè se e solo se $dim(< [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_n] > +W) = n + dim\, W$.

8.4) In $V = \mathbf{R}^4$, considera il sottospazio W generato da da $\mathbf{w}_1 = (2, 1, 4, 1)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 1)$. Determina la dimensione e una base di V/W. Determina, inoltre, le coordinate di $[(1, 1, 1, 1)]$ nella base scelta.

Il sottospazio W ha dimensione 2 perché i vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono linearmente indipendenti. Pertanto, dim (V/W) = dim V - dim W = 4 - 2 = 2. Per trovare una base di V/W è sufficiente completare $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ a base di V e considerare le classi aventi come rappresentanti i vettori introdotti nel completamento. Osserviamo che $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ formano una base di V (perché sono righe di una matrice ridotta) che completa $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, e quindi una base per V/W è data da $\overline{\mathcal{B}} = \{[\mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_4]\}$. Per determinare le coordinate di $[(1, 1, 1, 1)]$ nella base $\overline{\mathcal{B}}$, scrivo il rappresentante $(1, 1, 1, 1)$ come combinazione lineare della base $\mathcal{B}$:

$$(1, 1, 1, 1) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - 3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$$

Passando a quoziente, trovo che $[(1, 1, 1, 1)] = [\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2] - 3[\mathbf{e}_3] + [\mathbf{e}_4] = -3[\mathbf{e}_3] + [\mathbf{e}_4]$ ha coordinate $(-3, 1)$ in base $\overline{\mathcal{B}}$.

8.5) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato da $\vec{v}_1 = (3, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$. Considera lo spazio vettoriale quoziente V/W.

a) Esibisci 5 rappresentanti distinti per la classe $[(2, 1, 0, 3)]$.

b) Controlla se le seguenti uguaglianze sono vere: $[\mathbf{0}] = [(-6, 1, -5, 1)]$; $[\mathbf{0}] = [(2, 5, 0, 1)]$; $[(2, 1, 0, 0)] = [(5, -1, 2, 3)]$; $[(2, -1, 1, -1)] = [(5, 4, -2, 4)]$.

c) Determina la dimensione e una base di V/W. Determina, inoltre, le coordinate di $[(2, 2, 2, 2)]$ nella base scelta.

8.6) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_1 - x_4)$ e denota $W = Ker\, f$. Considera inoltre il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 2, 0)$.

a) U e $W = Kerf$ sono in somma diretta?

b) Discuti se $[\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_2]$ in $\mathbf{R}^4/W$.

c) Mostra che $\overline{\mathcal{B}} = \{[\mathbf{e_1}], [\mathbf{e_4}]\}$ è una base di $\mathbf{R}^4/W$.

d) Considera l'applicazione naturale $\overline{f} : \mathbf{R}^4/W \to \mathbf{R}^2$ che fattorizza f. Determina la matrice associata a $\overline{f}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

8.7) Considera l'applicazione lineare $f : V = \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_4 + x_5)$. Denota con $p : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5/Kerf$ la proiezione canonica e con $h : V/Ker\, f \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione tale che $f = h \circ p$, indotta dal primo teorema fondamentale di omomorfismo.

a) Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^5/Kerf$.

b) Determina la matrice di π rispetto alla base canonica in $\mathbf{R}^5$ e alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$.

c) Determina la matrice di h rispetto alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$ e la base canonica in $\mathbf{R}^2$.

d) Discuti se l'applicazione $g : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$, definita da $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_4 - x_5$ fattorizza attraverso p.

e) Considera il sottospazio U' di $\mathbf{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, -2, -1, -4, 0)$. Determina una base e la dimensione di $U = \pi(U')$. Determina inoltre una base di $p^{-1}(U)$.

f) Discuti se la posizione $\overline{f} : \mathbf{R}^5/Ker\, f \to \mathbf{R}^2/ < (1, 0) >$, $\overline{f}[v] = [f(v)]$, definisce una applicazione lineare.

8.8) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Denota con $p : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5/W$ la proiezione canonica V/W, $\mathcal{S}(V/W)$ l'insieme dei sottospazi di V/W e con $\mathcal{S}(V, W)$ l'insieme dei sottospazi di V che contengono W. Mostra che la seguente posizione è una biezione:$\mathcal{S}(V/W) \to \mathcal{S}(V, W)$, $U \mapsto p^{-1}(U)$. Deduci una biezione tra lo spazio proiettivo $\mathbf{P}(V/W)$ e la famiglia dei sottospazi di V che contengono W e di dimensione 1+ dim W.

Test 1 *Considera l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita da* $f(x_1, x_2, x_3) = (-5x_1 - 4x_2 + 4x_3, 8x_1 + 7x_2 - 4x_3, 3x_3)$.

(a) il vettore $(-1, 1, 0)$ *è un autovettore per* f*;*

(b) la massima dimensione di un autospazio per f *è 2;*

(c) f *è diagonalizzabile.*

Test 2 *Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto* $P(2 + i, 4 - i, 3)$.

(a) per P *passa una sola retta reale;*

(b) Per P *passa una unica retta isotropa;*

(c) la retta di equazioni $x_1 + x_2 + 6 = 0, x_1 + x_3 - 5 - i = 0$ *passa per* P *ed è ortogonale ad una retta reale per* P.

Test 3 *Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta* r *di equazioni* $x_1 - 2ix_2 - 1 - 4i = 0, ix_1 - 2ix_3 + 1 = 0$.
(a) la retta r *è reale;* *(b) la retta* r *è isotropa;*
(c) la retta r *è parallela al piano di equazioni* $ix_2 - x_3 = 0$*;* *(d) la retta* r *ha un punto reale.*

Test 4 *Nello spazio vettoriale* V *delle matrici reali* 3×3*, considera il sottospazio* U *delle matrici a traccia nulla e denota con* $\pi : V \to V/U$ *l'applicazione quoziente. Considera inoltre l'applicazione lineare* $f : V \to \mathbf{R}^3$ *definita da* $A \mapsto A\,(2, 1, 1)^t$.

(a) lo spazio V/U *ha dimensione 3;*

(b) le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *rappresentano la stessa classe in* V/U*;*

(c) esiste una applicazione lineare $g : V/U \to \mathbf{R}^3$ *tale che* $f = g \circ \pi$.