

- 8.1) Considera una matrice A in forma canonica di Jordan. Mostra che, se a è un autovalore per A , il numero di blocchi di Jordan in A di autovalore a coincide con la molteplicità geometrica di a .
- 8.2) Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, ove matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina il polinomio caratteristico di f e verifica che f è triangolabile.
- b) Verifica che è nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$) determinando esplicitamente il più piccolo indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$.
- c) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e una base per $Imf \cap Kerf$.
- 8.3) a) Determina gli autovalori di A , attraverso la traccia e il determinante, ove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- b) Determina una matrice diagonale Δ e una matrice invertibile C tale che $A = C\Delta C^{-1}$.
- c) Calcola A^2 e verificare se A soddisfa il suo polinomio caratteristico.
- d) Calcola la dimensione ed una base \mathcal{B} dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 generato dalle potenze di A .
- e) Calcola A^4 e le sue coordinate nella base \mathcal{B} determinata al punto precedente.
- 8.4) Considera un endomorfismo non nullo f di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Mostra che f è nilpotente se e solo se lo spettro di f è $\{0\}$.

- 8.5) Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Verifica che f è triangolabile.
- b) Determina una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0 e il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0 nella forma canonica di Jordan.
- c) Determina un riferimento R tale che $M_R(f)$ sia triangolare superiore.

- 8.6) Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Verifica che f è triangolabile e nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$).
- b) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e la forma canonica di Jordan di f .

8.7) Considera un endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V .

a) Dimostra che l'insieme $I(f)$ dei polinomi $p(\lambda) \in K[\lambda]$ tali che $p(f)$ è l'endomorfismo nullo, è un ideale non nullo di $K[\lambda]$. Utilizzando la divisione tra polinomi in una variabile, si mostra che l'ideale $I(f)$ è un ideale principale generato da un polinomio monico (caratterizzato dal fatto di essere il polinomio monico (non nullo) di grado minimo in $I(f)$); tale polinomio è detto il *polinomio minimo* di f e viene denotato con $m(\lambda)$.

b) Dimostra che le radici del polinomio minimo sono elementi dello spettro.

c) Dimostra che, se f è diagonalizzabile, il polinomio minimo ha solo radici semplici e l'insieme delle sue radici coincide con l'insieme degli autovalori di f (cioè, in questo caso, con lo spettro).

d) Dimostra che il polinomio minimo può essere calcolato come segue.

d_1) Considera il numero minimo h_1 tra gli indici $t > 0$ per i quali i vettori $\mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_1), \dots, f^t(\mathbf{v}_1)$ siano linearmente dipendenti. Sia $m_1(\lambda)$ un polinomio monico di grado h_1 tale che l'endomorfismo $m_1(f)$ verifichi $m_1(f)(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$ (quanti ce ne sono?). In modo analogo, definisci h_i e $m_i(\lambda)$ per ogni $i = 2, \dots, n$.

d_2) Poni $m(\lambda)$ il minimo comune multiplo di $m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)$. Mostra che $m(f)$ è l'endomorfismo nullo.

d_3) Mostra che $m(\lambda)$ coincide con il polinomio minimo di f .

8.8) Calcola il polinomio minimo delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.9) Mostra che una matrice quadrata A e la sua trasposta A^t hanno gli stessi autovalori, ma, in generale, autovettori distinti.

Cenni di soluzione

8.1)

8.2) Risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.3) Risulta

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

8.4)

8.5) Risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.6) Il numero di blocchi e' uguale alla dimensione dell'autospazio di autovalore 0. Risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.7)

8.8)

8.9) Poichè $(A - \lambda I)^t = (A^t - \lambda I)$ e il determinante di una matrice coincide con il determinante della trasposta, A e A^t hanno lo stesso polinomio caratteristico, e quindi gli stessi autovalori (con le stesse molteplicità algebriche). Per osservare che gli autovettori non sono necessariamente gli stessi, basta considerare, ad esempio, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. In tal caso, \vec{e}_1 è un autovettore per A ma non per A^t .