UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2011-12 ottavo incontro

8.1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che f è triangolabile e nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$).

b) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e la forma canonica di Jordan di f.

8.2) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che f è triangolabile.

b) Determina una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0 e il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0 nella forma canonica di Jordan.

c) Determina un riferimento R tale che $M_R(f)$ sia triangolare superiore.

8.3) Calcola il polinomio minimo delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.4) Considera un endomorfismo $f \in End(V)$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V.

a) Considera il numero minimo h_1 tra gli indici $t > 0$ per i quali i vettori $\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_1)$, ..., $f^t(\mathbf{v}_1)$ siano linearmente dipendenti. Sia $m_1(\lambda)$ un polinomio monico di grado h_1 tale che l'endomorfismo $m_1(f)$ verifichi $m_1(f)(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. In modo analogo, definisci h_i e $m_i(\lambda)$ per ogni $i = 2, \dots, n$.

b) Poni $m(\lambda)$ il minimo comune multiplo di $m_1(\lambda)$, ..., $m_n(\lambda)$. Mostra che $m(f)$ è l'endomorfismo nullo.

c) Il polinomio $m(\lambda)$ coincide con il polinomio minimo di f?

8.5) Considera la base duale $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ della base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Calcola $\mathbf{e}_1^*(2, 1-, 13)$, $(3\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + 5\mathbf{e}_3^*)(x_1, x_2, x_3)$.

b) Determina le coordinate, rispetto a tale base, della forma lineare $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, definita da $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 - x_3$.

c) Determina il nucleo di $3\mathbf{e}_1^* + 9\mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*$.

d) Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma lineare tale che $f(1, 2, 4) = 1$, $f(1, 0, 1) = 0$, $f(0, 0, 1) = 3$. Determina le coordinate di f rispetto alla base $\mathcal{E}^*$ di $(\mathbf{R}^3)^*$.

8.6) In uno spazio vettoriale V, considera una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e denota con $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*\}$ la base duale. Sia $f = 3\mathbf{v}_1^* + 2\mathbf{v}_2^* - 5\mathbf{v}_4^*$. Determina $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4)$.

8.7) In $\mathbf{R}^3$, considera la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, ove $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ denoti con $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*\}$ la base duale.

a) Determina $\mathbf{v}_2^*(\mathbf{v})$, ove $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

b) Determina $\mathbf{v}_i^*(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$.

8.8) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + x_3)$. Determina la matrice dell'applicazione trasposta f^t, rispetto alle basi duali delle basi canoniche.