8.1) a) Per ciascuna matrice, controlla rispetto a quali colonne è ridotta e controlla se è completamente ridotta.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Determina il rango di ciascuna delle matrici prima elencate.

c) Considera i sistemi non omogenei le cui matrici complete sono (rispettivamente) $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$. Quali di tali sistemi lineari sono compatibili? In caso il sistema sia compatibile, da quanti parametri liberi dipendono le soluzioni?

8.2) Applicando l'algoritmo di Gauss sulla matrice dei coefficienti, determina la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare a coefficienti reali in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

8.3) Si usi il secondo teorema di unicità per risolvere il seguente sistema omogeneo di equazioni su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z - u + v = 0 \\ x - y + z + 2u - v = 0 \\ y - 3u - 2v = 0 \end{cases}$$

e si determini la dimensione dello spazio delle sue soluzioni.

8.4) Applicando l'algoritmo di Gauss, metti la seguenti matrice in forma completamente ridotta, e calcolane il rango:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8.5) Applicando l'algoritmo di Gauss sulla matrice completa, calcola il numero di parametri liberi e determina una descrizione parametrica delle soluzioni del seguente sistema lineare a coefficienti reali in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 1 \end{cases}$$

Determina inoltre una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

8.6) Calcola la dimensione e determina una base del sottospazio dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^5$ generato da $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (5,1,3,2,3)$, $\mathbf{v}_4 = (0,1,0,0,1)$.

8.7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- due sistemi lineari sono equivalenti se e solo se sono compatibili;
- due sistemi lineari sono equivalenti se e solo se sono compatibili e hanno lo stesso numero di equazioni;
- due sistemi lineari sono equivalenti se e solo se sono compatibili e le equazioni dell'uno dipendono da quelle dell'altro e viceversa.

8.8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- un sistema lineare in n incognite è sempre equivalente ad uno compatibile;
- un sistema lineare in n incognite è sempre equivalente ad uno con al più $n+1$ equazioni;
- un sistema lineare compatibile in n incognite è sempre equivalente ad uno con al più n equazioni;
- un sistema lineare omogeneo in n incognite è sempre equivalente ad uno con al più n equazioni;
- un sistema lineare omogeneo in n incognite con soluzioni non banali è sempre equivalente ad uno con al più $n-1$ equazioni.