Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 Settimo incontro

7.1) Determina uno spazio topologico X e una famiglia numerabile di compatti la cui unione non sia compatta.

7.2) Esibisci uno spazio metrico (X, d) ed un sottoinsieme S chiuso e limitato che non sia compatto.

7.3) Considera la topologia euclidea su $\mathbf{R}^2$. Quali dei seguenti sottospazi sono connessi? quali sono compatti?

a) $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;

b) $Y_1 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid |y| > 0\}$;

c) $Y_2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid |y| > 0\}$.

7.4) Considera $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea. Dimostra che S^1, una coppia di circonferenze disgiunte, una coppia di circonferenze tangenti, una coppia di circonferenze secanti non sono a due a due omeomorfi.

7.5) Considera $\mathbf{R}^n$ con topologia euclidea ($n > 1$). Mostra che

a) $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbf{R}$.

b) $S^{n-1} \setminus \{N = (0, \dots, 1), S = (0, \dots, -1)\}$ è omeomorfo a $S^{n-2} \times \mathbf{R}$.

7.6) Considera su $\mathbf{R}$ la topologia che ha per base gli intervalli della forma $[a, b)$, $a < b \in \mathbf{R}$. Mostra che un sottoinsieme non vuoto S di $\mathbf{R}$ è connesso se e solo se è composto da un unico punto.

7.7) Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice *l*ocalmente costante se , per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno J di x tale che $f(x) = f(y)$ per ogni $y \in J$. Mostra che, se X è connesso e $f : X \to \mathbf{R}$ è continua e localmente costante, allora f è costante.

7.8) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff. Dimostra che, per ogni coppia di chiusi disgiunti A e B, esistono due chiusi Z e Y tali che $X = Z \cup Y$, $A \cap Z = \emptyset$, $B \cap Y = \emptyset$.

7.9) In uno spazio regolare X, considera due insiemi finiti disgiunti S e T. Mostra che esistono aperti disgiunti U e V, con $U \supseteq S$, $V \supseteq T$. Discutere se questa proprietà resta vera se sappiamo solo che X sia T_0 (oppure T_1 o T_2).