Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 settimo incontro

1.1) Sia $X$ uno spazio topologico e sia $S$ un suo sottoinsieme non vuoto. Sia $p : X \to Y = X/\ S$ la proiezione canonica. Mostra che

i) Per ogni $A \subset X$, $p^{-1}p(A) \subseteq A \cup S$.

ii) Se $A$ è aperto in $X$, allora $p$ è una applicazione aperta.

iii) Se $A$ non è aperto in $X$ e $p$ è aperta, allora $\mathring{A} = \emptyset$.

iv) Se $X = \mathbf{R}$ e $A = \mathbf{Q}$, allora $A$ ha interno vuoto, ma $p$ non é aperta né chiusa.

1.2) Siano $X$ e $Y$ spazi topologici (non vuoti), e sia $A$ un sottospazio non vuoto di $X$. Mostra che $A \times Y$ è retratto di $X \times Y$ se e solo se $A$ è retratto di $X$.

1.3) Siano $A$, $B$, $C$ sottoinsiemi di uno spazio topologico $X$. Mostra che se $A$ è retratto si $B$ e $B$ è retratto di $C$, allora $A$ è retratto di $C$.

1.4) Mostra che se $f : X \to S^2$ è una applicazione continua non suriettiva, allora $f$ è omotopa ad una costante.

1.5) Mostra che, se $x_0 \in S^1$, il sottoinsieme $\mathbf{R} \times \{x_0\}$ è retratto di $\mathbf{R} \times S^1$, ma non è retratto di deformazione forte.