Spazi e sottospazi proiettivi

7.1) Nella retta proiettiva reale numerica, considera i punti $A[1,2]$, $B[3,-1]$, $C[-3,-1]$, $D[6,-2]$. Discuti quali di tali punti sono distinti tra loro.

7.2) Considera il piano proiettivo $\mathbf{P}^2_K$.

a) Il punto $[4,-1,2]$ appartiene al sottospazio di equazione omogenea $2X_1 + X_2 = 0$?

b) Determina un sistema di punti indipendenti che generano il sottospazio di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$.

c) Determina una equazione omogenea per la retta passante per $[1,0,3]$ e per $[2,1,-1]$ e una rappresentazione parametrica di tale retta.

d) Determina la dimensione dell'intersezione tra i sottospazi di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$ e $X_0 - 4X_2 = 0$, rispettivamente. Descrivi, inoltre, le coordinate omogenee dei punti in tale intersezione.

e) Verifica che i punti $A[1,0,7]$, $B[2,-1,5]$, $C[4,-3,1]$, $D[3,-1,12]$ sono allineati e determina una equazione omogenea della retta proiettiva r che li contiene.

7.3) In $\mathbf{P}^3_K$, sia H_1 il sottospazio di equazioni $3X_0 + X_3 = 0, 2X_1 + 3X_3 = 0, 9X_0 - 2X_1 = 0$.

a) Determina la dimensione di H_1, un sistema di equazioni normali per H_1 ed il sottospazio vettoriale associato.

b) Discuti se H_1 è sghembo rispetto al sottospazio H_2 di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$.

c) Discuti se H_1 è sghembo rispetto a H_3 di equazioni $X_0 - X_2 = 0, X_2 - X_3 = 0$.

d) Determina un insieme massimale di punti indipendenti in H_1.

e) Determina l'equazione della stella di piani di centro H_1.

7.4) Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_K$, determina l'equazione omogenea di un piano che contenga i punti $A[1,0,1,0]$, $B[-1,-1,0,5]$, $C[4,0,0,1]$. Tale piano contiene il punto $D[-8,-2,2,8]$?

Determina inoltre (se esiste) una retta per C sghemba con la retta proiettiva per A e B.

7.5) In $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, sia H l'intersezione tra i sottospazi di equazione $X_0 - X_1 + X_3 = 0$ e $2X_0 - X_2 - X_3 = 0$, rispettivamente

a) Determina la dimensione di H e una base del sottospazio W di $V = \mathbf{R}^4$ tale che $H = \mathbf{P}(W)$.

b) Determina un insieme massimale di punti indipendenti in H.

c) Determina l'equazione della stella di piani di centro H.

7.6) In $\mathbf{R}^5$, considera i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0,0,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (1,3,2,2,-2)$, $\mathbf{v}_5 = (0,0,0,1,1)$. Considera inoltre i sottospazi $\mathbf{U}_1 =< \mathbf{v}_1 >$, $\mathbf{U}_2 =< \mathbf{v}_2 >$, $\mathbf{U}_3 =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 >$, $\mathbf{U}_4 =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5 >$.

a) Verifica se le somme $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3$ e $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_4$ sono dirette.

b) In $\mathbf{P}^4_{\mathbf{R}}$, determina la dimensione del sottospazio congiungente $\mathbf{P}(\mathbf{U}_1) \vee \mathbf{P}(\mathbf{U}_2) \vee \mathbf{P}(\mathbf{U}_4)$.