UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2014-15 settimo incontro

7.1) In $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, sia H l'intersezione tra i sottospazi di equazione $X_0 - X_1 + X_3 = 0$ e $2X_0 - X_2 - X_3 = 0$, rispettivamente

a) Determina la dimensione di H e una base del sottospazio W di $V = \mathbf{R}^4$ tale che $H = \mathbf{P}(W)$.

b) Determina un insieme massimale di punti indipendenti in H.

c) Determina l'equazione della stella di piani di centro H.

7.2) In $\mathbf{R}^5$, considera i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 2, 2, -2)$, $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 1, 1)$. Considera inoltre i sottospazi $\mathbf{U}_1 =< \mathbf{v}_1 >$, $\mathbf{U}_2 =< \mathbf{v}_2 >$, $\mathbf{U}_3 =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 >$, $\mathbf{U}_4 =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5 >$.

a) Verifica se le somme $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3$ e $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_4$ sono dirette.

b) In $\mathbf{P}^4_{\mathbf{R}}$, determina la dimensione del sottospazio congiungente $\mathbf{P}(\mathbf{U}_1) \vee \mathbf{P}(\mathbf{U}_2) \vee \mathbf{P}(\mathbf{U}_4)$.

7.3) In uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, considera sottospazi non nulli $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_r$ $(r \geq 3)$.

a) Mostra che la somma $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_r$ è diretta se e solo se la somma $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ è diretta, e inoltre $(\mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_{j-1}) \cap \mathbf{U}_j = \{\mathbf{0}\}$ per ogni $3 \leq j \leq r$.

b) Supponi che la somma $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_r$ sia diretta. Mostra che ogni vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{U}$ si scrive in modo unico $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_r$ come somma di vettori tali che $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i \ \forall i$.

7.4) Sia $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Mostra che autospazi relativi ad autovalori distinti sono tra loro in somma diretta. Puoi procedere per induzione, come indicato:

a) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori per f, relativi ad autovalori μ e λ tra loro differenti, mostra che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti. Deduci che gli autospazi relativi $\mathbf{V}_\mu$ e $\mathbf{V}_\lambda$ sono in somma diretta.

b) Per ipotesi induttiva, supponi che sia diretta la somma di r autospazi relativi ad autovalori distinti, comunque scelti. Se $\mathbf{V}_\mu$, $\mathbf{V}_{\lambda_1}, \ldots,$ $\mathbf{V}_{\lambda_r}$ sono autospazi di autovalori a due a due differenti per f, mostra che $\mathbf{V}_\mu \cap \mathbf{V}_{\lambda_1} + \ldots,$ $\mathbf{V}_{\lambda_r} = \{\mathbf{0}\}$.

7.5) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (x, 2x - 2y - 2z, 2x - 3y - z)$.

a) Determina, se è possibile, un riferimento R di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_R(f)$ di f nel riferimento R sia diagonale.

b) Sia A la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare una matrice invertibile P tale che, $D = P^{-1} A\, P$.

7.6) Considera la matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determina gli autospazi di B ed una loro base. Discuti se B è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.

7.7) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).

b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per $h = -1$, mostra che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile: determina una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori (per l moltiplicazione a sinistra per A) e una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$.

7.8) Dimostra che non esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{e}_1$ sia autovettore di autovalore 2, $\mathbf{e}_2$ sia autovettore di autovalore 3, mentre $(2, 5)$ sia autovettore di autovalore 2.

7.9) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

7.10) Determinare autovettori, la relativa molteplicità algebrica e una base dei relativi autospazi per le seguenti applicazioni lineari:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, -x_1 + 7x_2),$$

$$g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = (0, 2x_1 + x_2 + 6x_3, -2x_1 - x_2 - 4x_3),$$

$$h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, h(\vec{x}) = (5x_1+12x_2-6x_3, -3x_1-7x_2+3x_3, x_1+2x_2-2x_3) \text{(sapendo che -1 è un autovalore)}.$$

Soluzione Esercizio 7.5 a) La matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è: $p_f(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda-4)$. Dunque f ha due autovalori: $\lambda_1 = 1$, di molteplicità algebrica uguale a 2, e $\lambda_2 = -4$, di molteplicità algebrica uguale a 1. In particolare, il polinomio caratteristico di f si scompone come prodotto di fattori lineari in $\mathbf{R}$ e lo spettro di f è contenuto in $\mathbf{R}$. Affinché f sia diagonalizzabile, occorre mostrare che molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore. Sicuramente ciò accade per $\lambda_2 = -4$, perché la sua molteplicità algebrica è 1. La molteplicità geometrica $g(f,1)$ di $\lambda_1 = 1$ è per definizione uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente $V(f,1) = ker(f - \omega_1)$ ed è quindi uguale a $3 - rg(A - I)$. Ora $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è pari a 2 ed è uguale alla sua molteplicità algebrica. Dunque f è diagonalizzabile.

Un riferimento R rispetto al quale la matrice associata a f sia diagonale è un qualunque riferimento di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per f. Per determinare un tale riferimento R, determiniamo separatamente un riferimento per ciascun autospazio: il riferimento R sarà l'unione dei riferimenti degli autospazi (con un ordine assegnato). Cerchiamo quindi una base dell'autospazio $V(f,1)$ relativo all'autovalore 1 ed una di $V(f,-4)$, relativa all'autovalore -4, poi ne prendiamo l'unione. Lo spazio $V(f,1)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente all'equazione $2x_1 - 3x_2 - 2x3 = 0$. Dunque

$$V(f,1) = \{(3h + 2k, 2h, 2k) | h, k \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da $\mathbf{v_1} = (3,2,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$.

L'autospazio $V(f,-4)$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A + 4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema $x_1 = 0, x_2 = x_3$. Dunque

$$V(f,-4) = \{(0,h,h) | h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da $\mathbf{v_3} = (0,1,1)$. La base $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ soddisfa le richieste e $M_R(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. b) Sia C la matrice le cui colonne sono formate dalle coordinate dei vettori del riferimento scelto R: $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per definizione, C è la matrice associata all'identità di $\mathbf{R}^3$, ove si consideri il riferimento R nel dominio, e la base canonica nel codominio: se $\mathbf{v} = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, si ha che $C\,\mathbf{x'} = \mathbf{x}$. D'altra parte, se si scrive $f(\mathbf{v}) = y'_1\mathbf{v}_1 + y'_2\mathbf{v}_2 + y'_3\mathbf{v}_3 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, valgono le relazioni: $\mathbf{y'} = D\,\mathbf{x'}$, $\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$, $C\,\mathbf{y'} = \mathbf{y}$. Ne segue che $C\,\mathbf{y'} = A\,C\,\mathbf{x'}$ e $D = C^{-1}\,A\,C$. Dunque, la matrice $P = C$ soddisfa le richieste.

Soluzione Esercizio 7.6 Il polinomio caratteristico $p_B(\lambda)$ di B è:

$$det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(-4-\lambda)det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)^2(4+\lambda)^2$$

Gli autovalori di B sono dunque $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -4$ ed entrambi hanno molteplicità algebrica 2.

L'autospazio $V(B,2)$ relativo all'autovalore 2 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:
$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente a: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Dunque

$$\begin{aligned} V(B,2) &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1 = -x_2, x_3 = 0, x_4 = 0\} = \\ &= \{(h,-h,0,0)|h \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari a 1, mentre la molteplicità algebrica è 2: dunque la matrice B non è diagonalizzabile.

L'autospazio $V(B,-4)$ è lo spazio delle soluzioni di $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che è equivalente al sistema a scala: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dunque

$$V(B,-4) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1 = x_3 = x_4 = 0\} = \{(0,0,h,0)|h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{v}_1 = (0,0,1,0)$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore -4 è pari a 1 e la matrice B non è diagonalizzabile.