Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2013-14 settima settimana

7.1) Nella retta proiettiva reale, siano $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$, $D[d_0,d_1]$.

a) Determina il birapporto $(BACD)$ e confrontalo con $(ABCD)$.

b) Discuti se è possibile che (A,B,C,D) e (B,A,C,D) siano quaterne proiettive.

7.2) Nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2_K$, considera i punti $A[1,0,7]$, $B[2,-1,5]$, $C[4,-3,1]$, $D[3,-1,12]$. Verifica che i punti A, B, C, D sono allineati e calcola il birapporto $(ABCD)$.

7.3) Nella retta proiettiva numerica, fissa i punti $A[1,2]$, $B[3,-1]$, $C[2,1]$, $D[2,-5]$. Determina il birapporto $(ABCD)$.

7.4) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verificare che i seguenti punti sono in posizione generale: $A'[2,0,7]$, $B'[2,1,1]$, $C'[1,1,0]$, $D'[0,0,1]$.

b) Determinare la matrice della proiettività $\omega : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\omega([1,0,0]) = A'$, $\omega([0,1,0]) = B'$, $\omega([0,0,1]) = C'$, $\omega([1,1,1]) = D'$.

7.5) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x,y,z) = (5x+2z, y, 2x+2z).$$

a) Verifica che $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinarne il corrispondente autovalore.

b) Determina tutti gli autovalori di f e, per ciascuno di essi, una base del rispettivo autospazio. [Ricorda che puoi trovare gli autovalori studiando le radici reali del polinomio caratteristico. In questo caso, puoi riconoscere un autovalore anche osservando la matrice.]

c) Determina, se è possibile, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B}$ sia diagonale.

7.6) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).

b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per quali valori di h la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e qual è una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$?

d) Per $h = -1$, mostra che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile: determina una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori (per l moltiplicazione a sinistra per A) e una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$.

7.7) Dimostra che non esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{e}_1$ sia autovettore di autovalore 2, $\mathbf{e}_2$ sia autovettore di autovalore 3, mentre $(2,5)$ sia autovettore di autovalore 2.

7.8) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x,y) = (x+3y, 2x+6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

7.9) Determinare autovettori, la relativa molteplicità algebrica e una base dei relativi autospazi per le seguenti applicazioni lineari:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, -x_1 + 7x_2),$$

$$g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = (0, 2x_1 + x_2 + 6x_3, -2x_1 - x_2 - 4x_3),$$

$$h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, h(\vec{x}) = (5x_1 + 12x_2 - 6x_3, -3x_1 - 7x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3) \text{(sapendo che -1 è un autovalore)}.$$

Cenni di soluzione

7.1) a) $(BACD) = [d_1, d_0]$: si osservi che si sono scambiati i ruoli delle due entrate delle coordinate omogenee.

Per capire cosa è successo, possiamo ragionare come segue. Se considero A come punto improprio, l'insieme $\mathbf{P}^1 \setminus A$ viene identificato con una retta affine tramite la posizione:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{P}^1 \setminus A & \to & \mathbf{R} \\ [X_0, X_1] & \mapsto & X_0/X_1 = x \end{array}$$

Rifacciamo la stessa procedura assegnando a B le coordinate $[1, 0]$, ad A le coordinate $[0, 1]$ e a C le coordinate $[1, 1]$. Il cambio di coordinate è $\rho Y_0 = X_1$, $\rho Y_1 = X_0$ con $\rho \neq 0$. L'applicazione corrispondente risulta:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{P}^1 \setminus B & \to & \mathbf{R} \\ [Y_0, Y_1] & \mapsto & Y_0/Y_1 = X_1/X_0 = 1/x. \end{array}$$

c) Le due quaterne sono proiettive se e solo se hanno lo stesso birapporto. Devo chiedermi se esiste $D[d_0, d_1] \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $[d_0, d_1] = [d_1, d_0]$: ciò accade se e solo se $det \begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} = 0$, cioè se $d_0 = \pm d_1$; ciò corrisponde a due possibili scelte per D: $D_+ = C[1, 1]$ oppure $D_-[1, -1]$.

Rivedo l'esercizio in un'altro modo. Determino esplicitamente la matrice della proiettività $\omega : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $\omega(A) = B$, $\omega(B) = A$, $\omega(C) = C$. Ricavo che $\omega([X_0, X_1]) = [X_1, X_0]$, cioè ω è associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora devo scegliere D tale che $\omega(D) = D$: le coordinate (d_0, d_1) devono soddisfare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Dunque come rappresentante delle coordinate di D devo scegliere un autovettore di M. Si verifica facilmente che M è diagonalizzabile e D_+ e D_- corrispondono ad una base di autovettori.

Notare inoltre che $\omega \circ \omega = id$: se compongo ω con se stessa, trovo l'identità (riscambiando i primi due punti, A e B ritornano nella posizione originaria). Si dice che ω è una involuzione.

7.2) Per controllare che i punti sono allineati, basta osservare che i vettori $(1, 0, 7)$, $(2, -1, 5)$, $(4, -3, 1)$, $(3, -1, 12)$ generano un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^3$, che è la retta di equazione

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Uso $(1, 0, 7)$, $(2, -1, 5)$ come base del sottospazio vettoriale corrispondente alla retta e parametrizzo i punti della retta utilizzando questi vettori. Il punto A ha coordinate omogenee $[1, 0]$, mentre B ha coordinate $[0, 1]$. Ricavo $(4, -3, 1) = -2(1, 0, 7) + 3(2, -1, 5)$ e dunque C ha coordinate omogenee $[-2, 5]$. Infine, $(3, -1, 12) = (1, 0, 7) + (2, -1, 5)$, dunque D ha coordinate $[1, 1]$. Ora calcolo il birapporto utilizzando le coordinate omogenee introdotte sulla retta. Ricavo $(ABCD) = [-3, 2] = [3, -2]$.

7.3)

7.4)

7.5) a) $f(\mathbf{v}) = 6\mathbf{v}$: dunque $\mathbf{v}$ è autovettore di autovalore 6.

b) La matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ in dominio e codominio è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

So già che 6 è un autovalore per f. L'autospazio di autovalore 6 è $Ker(f - \omega_6)$ ed è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo avente per matrice dei coefficienti

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 5-6 & 0 & 2 \\ 0 & 1-6 & 0 \\ 2 & 0 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poiché rg $(A - 6I) = 2$, si ricava che V_6 ha dimensione $3 - 2 = 1$, ed è dunque generato da $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1)$.

Guardando la matrice, si vede che $\mathbf{e}_2$ è un autovettore, di autovalore 1. Dalla matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} 5-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ricava che l'autospazio $V_1 = Ker(f - I)$ ha dimensione 1 ed è generato da $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$. Il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f ha grado 3 ed è divisibile per $(6 - t)$ e per $(1 - t)$; risulta pertanto interamente fattorizzabile; il fattore mancante si ricava osservando che la somma delle radici di $p_f(t)$ (contando le molteplicità) è la traccia di A: l'autovalore 1 ha dunque molteplicità algebrica 2.

Altrimenti, potevamo calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ direttamente dalla matrice:

$$p_f(t) = det \begin{pmatrix} 5-t & 0 & 2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 2 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (5-t)(1-t)(2-t) - 4(1-t) = (1-t)[(5-t)(2-t) - 4].$$

Poiché $p_f(t) = (1-t)(t^2 - 7t + 6) = (1-t)^2(t-6)$, l'applicazione f ha spettro reale e autovalori: $t_1 = 6$ con molteplicità algebrica (e geometrica) 1, $t_2 = 1$ con molteplicità algebrica uguale a 2.

In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è strettamente minore della molteplicità algebrica.

c) Poichè per l'autovalore 1 di f molteplicità algebrica e geometrica non coincidono, l'applicazione f non è diagonalizzabile e la base richiesta non esiste.

7.6)

7.7) I vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $(2, 5)$ sono linearmente indipendenti: dunque l'autovalore 2 avrebbe molteplicità geometrica ≥ 2, e dunque molteplicità geometrica ≥ 2. Ma la molteplicità algebrica di 2 deve essere 1, perchè il dominio ha dimensione 2 e f ha almeno due autovalori distinti.

7.8) a) L'applicazione f ha rango 1, dunque ha nucleo non banale e 0 è un autovalore. L'autospazio $V_0 = Ker\, f$ è generato da $\vec{v} = (1, 2)$, mentre $Im f$ è generata dalla prima colonna di A, $\vec{w} = (-3, 1)$. Se f ammette autovettori di autovalore non nullo, il vettore $\vec{w}$ deve essere uno di questi;

si verifica direttamente che $f(\vec{w}) = 7\vec{w}$: dunque anche 7 è un autovalore per f, e $Span(\vec{w})$ è il corrispondente autospazio. Poichè $\mathbf{R}^2$ ha dimensione 2, l'applicazione f non ammette altri autovalori.

b) Per quanto osservato al punto precedente, l'insieme $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori per f e risponde alle richieste.

c) No, perchè non esistono autovettori non nulli di f tra loro ortogonali; infatti gli autovettori di f sono contenuti in V_0 e V_7, che hanno entrambi dimensione 1 e sono generati da vettori non ortogonali.