7.1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ove

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 14 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Controlla che $f$ è triangolabile. Determina una matrice triangolare superiore $T$ e una base $\mathcal{B}$ di $V$ rispetto alla quale $f$ sia rappresentato da $T$.

b) Determina una base di Ker $f^2$ e un vettore $\mathbf{w}$ che genera l'intersezione $Ker\, f^2 \cap Im\, f$. Determina infine un vettore $\mathbf{v}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

c) Determina una base per ogni autospazio e unisci i sottoinsiemi così ottenuti. Mostra che aggiungendo $\mathbf{v}$ all'insieme trovato ottieni una base di $V$. Determina la matrice di $f$ rispetto a questa base.

7.2) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo triangolabile di uno spazio vettoriale di dimensione finita $n$.

a) Mostra che esiste una base $\mathcal{B}$ di $V$ rispetto alla quale $f$ è rappresentata da una matrice triangolare inferiore.

b) È vero che, per ogni $t > 0$ naturale, la potenza $f^t$ di $f$ (ottenuta componendo $f$ per $t$ volte con se stessa) è ancora triangolabile?

c) Se $f$ è invertibile, è vero che anche $f^{-1}$ è triangolabile?

7.3) a) Mostra che gli autovalori di una matrice ortogonale sono uguali a 1 o a $-1$.

b) Mostra che ogni matrice ortogonale $2 \times 2$ con determinante $-1$ è diagonalizzabile.

c) Mostra che 1 è autovalore per ogni matrice ortogonale $3 \times 3$ con determinante 1 (che quindi è la matrice di una rotazione attorno ad un asse fisso). [suggerimento: Considera l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{O}\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}$ ortogonale con determinante 1. Mostra che $f$ ha almeno un autovalore $a$ . Posto $\mathbf{v}_1$ un versore che sia autovettore di autovalore $a$, sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un completamento ad una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard). Mostra che $W =< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ è $f$-stabile e che il determinante della matrice della restrizione di $f$ a $W$ (rispetto alla base $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$) è uguale ad $a$.]

7.4) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ove matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina il polinomio caratteristico di $f$ e verifica che $f$ è triangolabile ma non diagonalizzabile.

b) Determina la dimensione e una base dell'autospazio di autovalore 0 e scrivi la matrice di $f$ relativa a un completamento di tale base.

c) Verifica che $f$ è nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$) determinando esplicitamente il più piccolo indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$.