Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2011-12 settimo incontro

7.1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, ove

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 14 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Controlla che f è triangolabile. Determina una matrice triangolare superiore T e una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale f sia rappresentato da T.

b) Determina una base di Ker f^2 e un vettore $\mathbf{w}$ che genera l'intersezione $Ker\, f^2 \cap Im\, f$. Determina infine un vettore $\mathbf{v}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

c) Determina una base per ogni autospazio e unisci i sottoinsiemi così ottenuti. Mostra che aggiungendo $\mathbf{v}$ all'insieme trovato ottieni una base di V. Determina la matrice di f rispetto a questa base.

7.2) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo triangolabile di uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

a) Mostra che esiste una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale f è rappresentata da una matrice triangolare inferiore.

b) È vero che, per ogni $t > 0$ naturale, la potenza f^t di f (ottenuta componendo f per t volte con se stessa) è ancora triangolabile?

c) Se f è invertibile, è vero che anche f^{-1} è triangolabile?

7.3) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, ove matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina il polinomio caratteristico di f e verifica che f è triangolabile.

b) Verifica che nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$) determinando esplicitamente il più piccolo indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$.

c) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e una base per $Imf \cap Kerf$.

7.4) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base per uno spazio vettoriale V. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$ e $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i-1}$ per ogni $i = 2, \ldots, n$. Scrivi la matrice che rappresenta f in base $\mathcal{B}$. L'endomorfismo f è triangolabile? È nilpotente?

7.5) a) Determina gli autovalori di A, attraverso la traccia e il determinante, ove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Determina una matrice diagonale Δ e una matrice invertibile C tale che $A = C\Delta C^{-1}$.

c) Calcola A^2 e verificare se A soddisfa il suo polinomio caratteristico.

d) Calcola la dimensione ed una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 generato dalle potenze di A.

e) Calcola A^4 e le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$ determinata al punto precedente.