7.1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ su $\mathbf{R}$ siano fissati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 6, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (1, 1, 1)$.

(i) Applicando il metodo degli scarti successivi, estrai un insieme indipendente e discuti se esso è una base di $\mathbf{R}^3$.

(ii) Completa $\mathbf{u}_1 = (0, -1, 1)$ ad una base di $\mathbf{R}^3$.

(iii) Mostra che $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 3)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 1)$ formano una base di $\mathbf{R}^3$. Rispetto a tale base, determina le componenti di $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ rispettivamente.

7.2) Nello spazio vettoriale reale $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ su $\mathbf{R}$ siano fissati i polinomi $\mathbf{p}_1 = 3 + x$, $\mathbf{p}_2 = x^2 - x^3$, $\mathbf{p}_3 = x$, $\mathbf{p}_4 = x^2 + x^3$. Considera inoltre i polinomi $\mathbf{q}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{q}_2 = x^3$.

(i) Mostra che i polinomi $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ formano un riferimento R di V.

(ii) Determina i vettori delle componenti di $\mathbf{q}_1$ (risp. $\mathbf{q}_2$) nel riferimento R.

(iii) Completa $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ ad una base di V.

(iv) Determina il polinomio che ha componenti $(2, -1, 5, 7)$ nel riferimento R.

7.3) In $\mathbf{R}^3$, considera il sottospazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo in 3 variabili

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Determina una base di $\mathbf{R}^3$ che contiene una base di W.

7.4) Considera un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n ed una sua base ordinata $R =(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

a) Mostra che t vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t$ sono linearmente indipendenti se e solo se i loro vettori delle componenti in R sono linearmente indipendenti.

b) Mostra che $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1 >$ per ogni valore di $a \in \mathbf{K}$.

7.5) Determina la dimensione e una base del sottospazio dello spazio di matrici 2×2 a coefficienti reali $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che $b + c = 0$. Determina inoltre le componenti di $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ in tale base.

7.6) Considera le matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna delle matrici elencate, determina il rango e una sottomatrice quadrata dello stesso rango.