UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 Sesto incontro

6.1) Mostra che uno spazio topologico $X$ è $T_1$ se e solo se, per ogni $x \in X$, l'intersezione degli intorni di $x$ è $\{x\}$.

6.2) Mostra che se $X$ è uno spazio topologico $T_1$ e finito, allora $X$ è discreto.

6.3) Considera $\mathbf{R}$ con la topologia $\mathcal{T}_s$ degli intervalli aperti illimitati a sinistra (avente per base le semirette aperte decrescenti).

a) Mostra che tale spazio non è $T_2$ nè $T_1$, ma è $T_0$.

b) Mostra che un sottoinsieme $S$ è compatto se e solo se ha un massimo.

6.4) Sia $X$ uno spazio topologico $T_1$. Siano $S \subset X$ un sottoinsieme di $X$ e $x$ un punto di accumulazione per $S$.

i) Mostra che, per ogni intorno $U$ di $x$, l'insieme $U \cap S$ è infinito.

ii) Mostra che il derivato $D(S)$ di $S$ è chiuso.

6.5) Mostra che ogni sottospazio di uno spazio topologico $T_3$ è anch'esso $T_3$.

6.6) Mostra che in ogni spazio compatto di Hausdorff, dati un compatto $K$ ed un punto $x_0$ esterno a $K$, esistono aperti disgiunti $U$ e $V$ con $U \supset K$ e $V \ni x_0$. Concludi che ogni spazio compatto di Hausdorff è $T_3$.