Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 sesto incontro

1.1) Siano X uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Si consideri la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \text{ aperto in } X\}$. Mostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su Y e discutere quale sia la topologia indotta su $Y \setminus f(X)$.

1.2) Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ applicazioni quoziente tra spazi topologici. Mostrare che la composizione $g \circ f : X \to Z$ è una applicazione quoziente.

1.3) Si considerino i sottoinsiemi $X = [0,1] \cup [2,3]$ e $Y = [0,1]$ di $\mathbf{R}$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea). Su X si consideri la relazione $x \sim x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $\{x, x'\} = \{1, 2\}$. Controllare se $X/\sim$ è omeomorfo a Y.

1.4) Si considerino i sottoinsiemi X e Y di $\mathbf{R}^3$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad Y = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

Su X si consideri la relazione $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) = (x',y',z')$ oppure $z = z' = 0$. Mostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a Y.

1.5) Siano X e Z spazi topologici e $f : X \to Z$ una applicazione continua e suriettiva. Siano $\sim_f$ la relazione di equivalenza su X definita da f e $p : X \to X/\sim_f$ la proiezione canonica. Sia $g : (X/\sim_f) \to Y$ l'applicazione tale che $f = g \circ p$. Sono equivalenti:

a) g omeomorfismo.

b) V aperto in Y se e solo se $f^{-1}(V)$ aperto in X.

1.6) Sia $f : X \to Y$ una applicazione quoziente tra spazi topologici. Mostrare che, se le componenti connesse di X sono aperte, anche le componenti connesse di Y sono aperte.

1.7) Sia $f : X \to Y$ una applicazione quoziente tra spazi topologici che sia una applicazione aperta. Diciamo che un sottoinsieme $A \subset X$ è saturo se $A = f^{-1}(B)$ per un opportuno sottoinsieme B di Y. Mostrare che, se A è saturo, anche l'interno di A è saturo.