Complessificazione dello spazio affine e euclideo

6.1) Controlla se i vettori $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

6.2) Siano $\vec{u} = (1-i, 4+i, i)$, $\vec{w}_1 = (2+i, 3, 1-3i)$, $\vec{w}_2 = (3+i, 3+3i, -2+4i)$. Discuti se il sottospazio $U = Span(\vec{u})$ (risp., $W = Span(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$) è reale.

6.3) Considera i punti $A(7+i, 1-i, 3)$, $B(3-2i, 5+i, 4i)$, $C(1-i, 6+2i, 1+i)$, $D(-3-4i, 10+8i, -2+5i)$.

i) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C, D) sono equipollenti.

ii) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C', D') sono equipollenti ove $C'(3-i, 2i, 7+3i)$, $D'(-1-4i, 3-i, 1+i)$.

iii) Verifica se (A, B) (rispettivamente, (C, D) e (C', D')) individua un vettore che può essere rappresentato da una coppia di punti di $\mathbf{E}$.

6.4) Denota con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori liberi di $\mathbf{E_C}$. Siano $\mathbf{v}$ un vettore di componenti (x_1, x_2, x_3) e $\mathbf{w}$ un vettore di componenti (y_1, y_2, y_3) in $\mathcal{R}$.

i) Se $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ è il cambio di coordinate tra $\mathcal{R}$ e un altro riferimento reale $\mathcal{R}'$, quali sono le compomenti di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}'$?

ii) Posto $\mathbf{u}$ il vettore che ha componenti $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ in $\mathcal{R}$, dimostra che in ogni riferimento reale le componenti di $\mathbf{u}$ sono la somma delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nello stesso riferimento. Osserva che in tal modo è possibile definire $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$ in modo che la posizione non dipenda dalla scelta del riferimento.

6.5) Sia r l'insieme dei punti di coordinate $(1+i+t(-i), 5+t(2-6i), t)$, al variare di $t \in \mathbf{C}$. Descrivi l'immagine di r rispetto al coniugio.

6.6) Dati i punti $L(3+i, 2i, 9-3i)$ e $M(3, -1+i, -i)$, determina le componenti del vettore $\mathbf{LM}$.

6.7) Controlla se il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e quello generato da $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

6.8) Determina una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni in $\mathbf{C}^3$ del sistema lineare:

$$\begin{cases} (2-i)x - 3y + z = 0 \\ 3x + (1+i)y + iz = 0 \end{cases}$$

6.9) Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 + (2i-3)x_2 + 2ix_3 + i = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 - i = 0.$$

i) Discuti la posizione relativa di r e della sua coniugata.

ii) Discuti se r ha punti reali.

6.10) Il piano π di equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 + i = 0$ ha punti reali?

6.11) Considera fissati i punti $A(2-7i, 5, i+4)$, $B(1, 12-4i, 9i)$, $D(1-7i, -17, i+9)$, $G(14i-1, 26-12i, 25i-8)$, $H(-4+i, 2+11i, 16-3i)$.

i) Determina equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per A e B (e, rispettivamente, della retta s passante per C e D). Discutere la mutua posizione di r e s.

ii) Controlla se i punti A, B, G sono allineati (cioè se esiste una retta che li contiene tutti e tre).

iii) Determina un vettore parallelo alla retta s di equazioni: $3x-(2+i)y+iz=0, 5ix+4z+i=0$. Discuti se la giacitura di s è un sottospazio reale dello spazio dei vettori complessi.

iv) Determina equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per $P(1,1,1)$ e parallela a $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$. Qual è l'intersezione tra r e l'immagine $\overline{r}$ di r rispetto al coniugio?

v) Determina una equazione cartesiana ed equazioni parametriche per un piano α passante per A, B, H. Tale piano è unico? Determina inoltre la giacitura del piano α e discutere se tale giacitura è un sottospazio reale dello spazio dei vettori liberi.

vi) Determina le coordinate del vettore libero $\mathbf{v}$ individuato dalla coppia ordinata (A, B). Determinare, inoltre, le coordinate del vettore coniugato $\overline{\mathbf{v}}$. Infine, determinare parte reale e parte immaginaria di $\mathbf{v}$.

vii) Considera l'inclusione naturale ι dell'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio euclideo nell'insieme $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ dei vettori liberi dello spazio complesso. La coppia ordinata (A, D) rappresenta un vettore appartenente all'immagine di ι?

6.12) Sia r la retta di equazioni parametriche $x = 2+7i\,t, y = 3-(1+i)\,t, z = 2$.

i) Discuti se la retta r è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.

ii) Discuti l'esistenza di un piano reale contenente r.

6.13) Sia r la retta di equazioni cartesiane $ix-(5+6i)\,y+z+4=0, (5+5i)\,y-(1+i)\,z=-1-i$. Determina equazioni cartesiane reali di un piano reale passante per r, se tale piano esiste.

6.14) Determina equazioni cartesiane a coefficienti reali di una retta reale r passante per $P(2, 3-i, 6i)$.

6.15) La retta r ha equazioni cartesiane: $3ix_1 + x_2 + (5+18i)x_3 - (7+27i) = 0$, $x_1 + ix_2 + (6+5i)x_3 - 9 - 7i = 0$. Determina un vettore direttore di r e discuti se la giacitura di r è reale.

6.16) Sia π il piano di equazione cartesiana $3ix_1 - 5x_2 + (2-i)x_3 + 5 = 0$.

i) Determina una base della giacitura e equazioni parametriche per π.

ii) Determina una descrizione parametrica di $\pi \cap \overline{\pi}$, discutendo se il piano π è reale.

6.17) Considera i piani $\alpha: x_1 - x_2 + ix_3 + 5 = 0$ e β: $x_1 + ix_2 + ix_3 + 3 = 0$.

i) Usando i minori, determina un vettore direttore per la retta $r = \alpha \cap \beta$.

ii) Determina la posizione relativa tra r e la coniugata $\overline{r}$.

6.18) Siano fissati il punto $P(3+i, 2-i, -3+2i)$ e i piani α e β di equazione cartesiana, rispettivamente,

$$\alpha : (2i-3)x_1 + ix_2 + x_3 - 4i + 1 = 0, \quad \beta : -3ix_1 + ix_3 + 1 = 0.$$

i) Determina equazioni cartesiane reali di una retta reale s passante per P, se essa esiste.

ii) Determina equazioni cartesiane reali di un piano reale che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Se tale piano non esiste, motivare la risposta.

iii) Determina l'equazione del fascio di piani paralleli a α.

iv) Discuti se il piano α è reale e determina un vettore parallelo sia ad α che ad $\overline{\alpha}$.

v) Discuti se la giacitura di β è reale. Qual'è l'intersezione tra β e il coniugato $\overline{\beta}$?

6.19) Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale e sia fissato il punto $Q(i, -1)$.

a) Determina la distanza tra $P(2 - i, 3)$ e Q.

b) Detemina l'equazione parametrica per ogni retta isotropa passante per Q.

c) Sia r una retta isotropa passante per Q. Tale retta ha punti reali?

d) Determina equazioni cartesiane per la retta s per Q e ortogonale alla retta $2x - (2 + 7i)y + 5 = 0$.

e) Discuti se il cambio di riferimento $x' = \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y + 6 - 2i, y' = \frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{1}{3}y + 2$ è un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali.