6.1) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1 = (3,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,1)$.

a) Completa $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ad un riferimento $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$.

b) In $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, determina un insieme di equazioni omogenee per un sottospazio massimale sghembo con $[\vec{v}_1] \vee [\vec{v}_2]$.

c) In $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, completa $[\vec{v}_1]$, $[\vec{v}_2]$ in un insieme di 5 punti in posizione generale.

6.2) Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_K$, determina l'equazione omogenea di un piano che contenga i punti $A[1,0,1,0]$, $B[-1,-1,0,5]$, $C[4,0,0,1]$. Controlla se tale piano contiene il punto $D[-8,-2,2,8]$. Determina inoltre (se esiste) una retta per C sghemba con la retta proiettiva per A e B.

6.3) Nel piano proiettivo numerico $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, considera le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - 2X_1 = 0$ e $s : X_0 + 3X_2 = 0$ rispettivamente. Determina un cambio di coordinate omogenee $[\vec{Y}] = [M\vec{X}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.

6.4) Determina le equazioni di una proiettività non identica $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che il punto $P[1,2,1]$ sia fisso (cioè coincide con la propria immagine) e la retta r di equazione $X_0 + X_1 = 0$ sia fissa punto a punto.

6.5) Determina la dimensione ed una base di Ker f e Im f, ove $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è definita da $f(x,y,z) = (x+3z, 2x+y+z, 3x+y+4z)$. Determina inoltre la matrice associata a f nella base $\vec{v}_1 = (-3,5,1), \vec{v}_2 = (1,1,0), \vec{v}_3 = (1,0,0)$.

6.6) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ definita da $f(\vec{e}_1) = (1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,2,0,1)$, $f(\vec{e}_3) = (-1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_4) = (1,1,0,1)$. Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$.

a) Mostra che $f(W) \subset W$.

b) Determina la matrice B di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

c) Che particolarità ha la matrice B? L'applicazione lineare f induce una proiettività in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$?

6.7) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verifica che sono in posizione generale i punti: $P_0[1,1,0]$, $P_1[0,0,1]$, $P_2[3,2,0]$, $P_3[0,1,5]$.

b) Determina equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\varphi([1,0,0]) = P_0$, $\varphi([0,1,0]) = P_1$, $\varphi([0,0,1]) = P_2$, $\varphi([1,1,1]) = P_3$.

6.8) Sia f un endomorfismo in uno spazio vettoriale V. Supponi che $V = W \oplus U$ per opportuni sottospazi f-invarianti W e U, che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ sia una base di W e $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ una base di U.

a) Discuti le caratteristiche della matrice che rappresenta f nella base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$.

b) Discuti le caratteristiche della matrice che rappresenta f in una base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$.

6.9) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x,y,z) = (-3x-5y, 2y, 5y-3z).$$

a) Per ciascuno dei vettori della base canonica, controlla se è un autovettore e, in caso positivo, quale ne sia l'autovalore corrispondente.

b) Verifica che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinane il corrispondente autovalore.

c) Determina una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori e la corrispondente matrice di f in tale base. Cosa succede cambiando l'ordine dei vettori in tale base?

6.10) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (5x + 2z, y, 2x + 2z).$$

a) Verifica che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinarne il corrispondente autovalore.

b) Determina tutti gli autovalori di f e, per ciascuno di essi, una base del rispettivo autospazio.
c) Determina, se è possibile, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B}$ sia diagonale.

d) Sia W l'autospazio di autovalore 6. Determina una base di $\mathbf{R}^3/W$ e la corrispondente matrice dell'endomorfismo indotto da f passando a quoziente.

6.11) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).
b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?
c) Per $h = -1$, mostra che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile: determina una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori (per l moltiplicazione a sinistra per A) e una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$.

6.12) Dimostra che non esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{e}_1$ sia autovettore di autovalore 2, $\mathbf{e}_2$ sia autovettore di autovalore 3, mentre $(2, 5)$ sia autovettore di autovalore 2.

6.13) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

6.14) Determinare autovettori, la relativa molteplicità algebrica e una base dei relativi autospazi per le seguenti applicazioni lineari:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, -x_1 + 7x_2),$$

$$g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = (0, 2x_1 + x_2 + 6x_3, -2x_1 - x_2 - 4x_3),$$

$$h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, h(\vec{x}) = (5x_1{+}12x_2{-}6x_3, -3x_1{-}7x_2{+}3x_3, x_1{+}2x_2{-}2x_3) \text{(sapendo che -1 è un autovalore)}.$$