6.1) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (5x + 2z, y, 2x + 2z).$$

a) Verifica che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinarne il corrispondente autovalore.

b) Determina tutti gli autovalori di f e, per ciascuno di essi, una base del rispettivo autospazio.

c) Determina, se è possibile, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B}$ sia diagonale.

6.2) Determina autovalori e autovettori dell'endomorfimo $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito da $f(x_1, x_2) = (11x_1 + 6x_2, -18x_1 - 10x_2)$. Discuti se f è diagonalizzabile e, in caso positivo, determina un riferimento $\mathcal{B}$ di autovettori per f, la matrice Δ di f nel riferimento $\mathcal{B}$ e una matrice invertibile $\mathbf{C}$ tale che $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \Delta$, ove $\mathbf{A}$ sia la matrice di f nel riferimento canonico.

6.3) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).

b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per quali valori di h la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e qual è una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$?

6.4) Dimostra che non esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\vec{e}_1$ sia autovettore di autovalore 2, $\vec{e}_2$ sia autovettore di autovalore 3, $(2, 5)$ sia autovettore di autovalore 2.

6.5) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

6.6) Determina un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ nel nucleo di f e $(0, 1, 0)$ abbia come immagine $\mathbf{e}_1$. È possibile sceglierlo in modo che f sia diagonalizzabile?

6.7) Considera un endomorfismo non nullo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

a) È vero che, se f è diagonalizzabile, necessariamente $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}\}$? b) È vero che, se per ogni $m = 0, \ldots, n$ esiste un sottospazio W_m f-invariante, allora f è diagonalizzabile?

Altri esercizi:

6.6) Determinare autovettori ed una base dei relativi autospazi per le seguenti applicazioni lineari:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, -x_1 + 7x_2),$$

$$g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = (0, 2x_1 + x_2 + 6x_3, -2x_1 - x_2 - 4x_3),$$

$h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, h(\vec{x}) = (5x_1+12x_2-6x_3, -3x_1-7x_2+3x_3, x_1+2x_2-2x_3)$(sapendo che -1 è un autovalore).

Per ciascuno di esse, discutere se l'applicazione lineare è diagonalizzabile.

6.7) Le matrici seguenti hanno entrambe polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina, per ogni autovalore gli autospazi relativi per $\mathbf{A}_1$. Determina inoltre la dimensione degli autospazi di $\mathbf{A}_2$.

b) Le matrici sono simili tra loro?

6.8) Considera l'applicazione lineare di $\mathbf{R}^3$ definita dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + y + z, z).$$

Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f sia diagonale.

6.9) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (x, 2x - 2y - 2z, 2x - 3y - z).$$

a) Determina, se è possibile, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B}$ sia diagonale.

b) Sia A la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determina una matrice invertibile P tale che, $D = P^{-1}\, A\, P$.