6.1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ verifica se il sistema di vettori $S = [(1,0,0),(2,6,5),(1,4,3),(32,9,1)]$ è dipendente e determina, se esiste, un vettore di S che dipende dai rimanenti (esibendo esplicitamente una tale combinazione lineare).

6.2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^5$ su $\mathbf{R}$ calcola la dimensione e determina una base del sottospazio generato da $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1,-3)$, $\mathbf{v}_4 = (5,1,3,2,3)$, $\mathbf{v}_5 = (0,1,0,0,1)$, $\mathbf{v}_6 = (0,3,0,0,3)$.

6.3) Dimostra che, se uno spazio vettoriale ha un sottospazio di dimensione $m > 0$, allora ha anche (almeno) un sottospazio di dimensione i, per ogni $0 \leq i \leq m-1$.

6.4) Dimostra che, se uno spazio vettoriale ha dimensione m, allora ogni suo sottospazio W di dimensione m coincide con V.

6.5) Sia S un sistema di vettori in uno spazio vettoriale V:

a) Dimostra che, se S non è un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V, allora S non è un sistema di generatori per V.

b) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$, fornisci l'esempio di un sistema di generatori S_1 che non sia un sistema massimo di vettori linearamente indipendenti.

6.6) Determina la dimensione e una base del sottospazio dello spazio di matrici 2×2 a coefficienti reali $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ tali che $a + b = 0$.

6.7) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ su $\mathbf{R}$ calcola la dimensione e determina una base del sottospazio generato da $\mathbf{v}_1 = (1,2,0,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (5,4,2,2)$.

6.8) Calcola la dimensione e una base del sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ formato dalle soluzioni dell'equazione $x_1 - x_2 = 0$.

6.9) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{K}^n$, considera i vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_i$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_n$. Dimostra che essi formano una base di $\mathbf{K}^n$.

6.10) Provare che $S = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ è linearmente indipendente se e solo se per ogni n-pla di scalari $(k_1, \ldots, k_n)$ tutti non nulli, anche il sistema $[k_1\mathbf{v}_1, \ldots, k_n\mathbf{v}_n]$ è indipendente.

6.11) Scrivi una definizione per ciascuno dei seguenti termini e confrontala con la definizione nel libro.

- Base di uno spazio vettoriale

- Dimensione di uno spazio vettoriale