5.1) Considera un insieme X, dotato della topologia cofinita. Mostra che X è compatto e ogni suo sottoinsieme è compatto.

5.2) Considera il sottoinsieme $S = [0, 1)$ dello spazio topologico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Esibisci un ricoprimento aperto di S che non ammette sottoricoprimento finito.

5.3) Sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia di uno spazio topologico X. Mostra che, se ogni ricoprimento di X estratto da $\mathcal{B}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.

5.4) Sia $\{Y_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X.

a) Mostra che $\cup_{j\in J}(X \setminus Y_j) = X \setminus (\cap Y_j)$.

b) Diciamo che la famiglia $\{Y_j\}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* se per ogni sottoinsieme finito A di J, l'intersezione $\cap_{\alpha\in A} Y_\alpha$ è non vuota. Mostra che le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) X è compatto, cioè ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

ii) ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota, contiene una famiglia finita la cui intersezione è vuota.

iii) ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

5.5) Considera un sottoinsieme compatto S dello spazio topologico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Fissato $p \in \mathbf{R}$, con $p \notin S$, considera l'applicazione $f : \mathbf{R} \setminus \{p\} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x-p}$.

a) Mostra che f è continua.

b) Mostra che esiste $k \in \mathbf{R}$ con $k > 0$ e tale che $|x - p| > k$ per ogni $x \in S$.

c) Osserva che ciò dimostra (nuovamente) che S è chiuso.

5.6) Sia (X, d) uno spazio metrico e sian A, B due sottoinsiemi. Si definisce "distanza " tra A e B il numero

$$d(A, B) = inf\,\{d(a, b)\,|a \in A, b \in B\}.$$

a) Esibire un esempio in cui A e B sono chiusi disgiunti, ma $d(A, B) = 0$.

b) Mostrare che, se A e B sono disgiunti con A chiuso e B (chiuso e) compatto, allora $d(A, B) > 0$.

5.7) Considera due applicazioni $f : X_1 \to Y_1$ e $g : X_2 \to Y_2$ tra spazi topologici. Considera inoltre l'applicazione $F : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ tra gli spazi prodotto definita da $F(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$, $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Mostra che

a) F è aperta se e solo se f e g sono aperte.

a) F è omeomorfismo se e solo se f e g sono omeomorfismi.