Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 quinto incontro

1.1) Siano X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di X. Mostrare che $\mathcal{B}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$ su X se e solo se $\mathcal{B}$ verifica le proprietà seguenti:

a) per ogni $x \in X$, esiste $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$.

b) Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e ogni $x \in B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, esiste $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ (cioè $B_1 \cap B_2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$).

1.2) Mostrare che le componenti connesse di uno spazio topologico X sono aperte se e solo se ogni punto $x \in X$ possiede almeno un intorno connesso.

1.3) Si considerino $\mathbf{R}^2$ e S^1 come sottospazi di $\mathbf{R}^2$ dotato della topologia euclidea. Si consideri l'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \vec{0} \to S^1$ definita da $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$. Discutere se S^1 ha la topologia quoziente rispetto a f.

1.4) Mostrare che $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $\mathcal{R}$ (con topologia euclidea).

1.5) Sia X uno spazio topologico. mostrare che l'applicazione $f : X \times X \to X \times X$ definita da $f(x, y) = (y, x)$ è un omeomorfismo. Determinare un modello per la compattificazione di Alexandroff della parabola $X = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ e dell'iperbole $Y = \{(x, y) \mid xy = 1\}$.

1.6) Determinare la compattificazione di Alexandroff di $(0, 1]$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea in $\mathbf{R}$).

1.7) Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua tra spazi topologici. Definiamo una applicazione $f^* : X^* \to Y^*$ tra le compattificazioni con un punto all'infinito, mediante le posizione : $f^*(x) = f(x)$ $\forall x \in X$, $F^*(\infty_X) = \infty_Y$. È vero che f^* è continua?

1.8) Sia (X, d) uno spazio metrico e sian A, B due sottoinsiemi. Si definisce "distanza " tra A e B il numero

$$d(A, B) = inf\,\{d(a, b)\,|a \in A, b \in B\}.$$

a) Esibire un esempio in cui A e B sono chiusi disgiunti, ma $d(A, B) = 0$.

b) Mostrare che, se A e B sono disgiunti con A chiuso e B (chiuso e) compatto, allora $d(A, B) > 0$.