5.1) In $V = \mathbf{R}^4$, considera il prodotto scalare definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$, ove: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Verifica se il prodotto scalare è semidefinito.

b) Determina una base (rispettivamente) per il sottospazio $V^\perp$ e un sottospazio U tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus^\perp V^\perp$.

c) Determina una base ortogonale di V.

d) Determina una base ortogonale del sottospazio W di equazione $3x_1 - x_2 + x_4 = 0$. È possibile determinare una base ortonormale di W?

e) Determina una base ortogonale del sottospazio generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = (0, -1, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, -0)$.

f) Esiste un sottospazio di dimensione 2 di V non degenere contenente isotropi?

5.2) Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale.

a) Determina i vettori isotropi paralleli al piano π di equazione $3x_1 - x_2 = 0$.

b) Determina le rette isotrope per $P(0, -5i, 0)$ e contenute nel piano α di equazione cartesiana $2ix_1 + 2x_3 = 0$.

c) Determina i piani isotropi passanti per la retta r di equazioni $\frac{x_1-3}{2i} = \frac{x_2-(3+2i)}{-1} = \frac{x_3-(45+5i)}{\sqrt{3}}$. Determina inoltre l'equazione del fascio di piani per r.

d) Determina i piani isotropi che contengono la retta s passante per $A(1, -12i, 5)$ e parallela al vettore di componenti $(2, 0, 7i)$.

5.3) Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale. Sia r la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 7i\,t, y = 3 - (1 + i)\,t, z = 2$.

Sia s la retta di equazioni parametriche $x = 2 - i + 3\,h, y = 1 + i + 2\,h, z = -h$.

a) Discuti se la retta r è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.

b) Discuti l'esistenza di un piano reale contenente r.

c) Discuti se la retta s è reale e la mutua posizione con $\overline{s}$.

d) Discuti l'esistenza di un piano reale contenente s (e, in caso positivo, discutine l'unicità e determinane una equazione cartesiana).