Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2014-15 quinto incontro

5.1) Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale e sia fissato il punto $Q(i,-1)$.

a) Determina la distanza tra $P(2-i,3)$ e Q.

b) Detemina l'equazione parametrica per ogni retta isotropa passante per Q.

c) Sia r una retta isotropa passante per Q. Tale retta ha punti reali?

d) Determina equazioni cartesiane per la retta s per Q e ortogonale alla retta $2x-(2+7i)y+5=0$.

e) Discuti se il cambio di riferimento $x' = \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y + 6 - 2i, y' = \frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{1}{3}y + 2$ è un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali.

5.2) Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale.

a) Determina i vettori isotropi paralleli al piano π di equazione $3x_1 - x_2 = 0$.

b) Determina le rette isotrope per $P(0,-5i,0)$ e contenute nel piano α di equazione cartesiana $2ix_1 + 2x_3 = 0$.

c) Determina i piani isotropi passanti per la retta r di equazioni $\frac{x_1-3}{2i} = \frac{x_2-(3+2i)}{-1} = \frac{x_3-(45+5i)}{\sqrt{3}}$. Determina inoltre l'equazione del fascio di piani per r.

d) Determina i piani isotropi che contengono la retta s passante per $A(1,-12i,5)$ e parallela al vettore di componenti $(2,0,7i)$.

5.3) Determina la dimensione ed una base di Ker f e Im f, ove $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è definita da $f(x,y,z) = (x+3z, 2x+y+z, 3x+y+4z)$. Determina inoltre la matrice associata a f nella base $\vec{v}_1 = (-3,5,1), \vec{v}_2 = (1,1,0), \vec{v}_3 = (1,0,0)$.

5.4) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ definita da $f(\vec{e}_1) = (1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,2,0,1)$, $f(\vec{e}_3) = (-1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_4) = (1,1,0,1)$. Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$.

a) Mostra che $f(W) \subset W$.

b) Determina la matrice B di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

c) Individua una base $\overline{\mathcal{B}}$ dello spazio quoziente $\mathbf{R}^4/W$ e la matrice (rispetto a tale base) dell'applicazione $\overline{f}$ indotta da f sul quoziente.

5.5) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x,y,z) = (5x+2z, y, 2x+2z).$$

a) Verifica che $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinane il corrispondente autovalore a. Determina la dimensione e una base $\mathcal{B}_a$ dell'autospazio relativo all'autovalore a.

b) Osserva la matrice A associata a f in base canonica, e deduci (guardando la matrice e senza fare ulteriori conti) che 1 è un autovalore per f. Determina la dimensione e una base $\mathcal{B}_1$ dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

c) Calcola il polinomio caratteristico della matrice A e verifica che f non ha autovalori diversi da quelli già trovati.

d) Verifica se $\mathcal{B} = \mathcal{B}_a \cup \mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbf{R}^3$. In caso positivo, determina la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B}$.