5.1) Nel piano proiettivo numerico reale, considera i punti $A[1,0,1]$, $B[1,1,0]$ e $C[0,1,1]$. Considera, inoltre, la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, $\varphi[X_0, X_1, X_2] = [X_0 - X_1, X_0 + X_1 + X_2, X_0 + 2X_2]$.

a) Determina una matrice A che rappresenta φ.

b) Determina le coordinate omogenee di $\varphi(A)$, di $\varphi(B)$ e di $\varphi(C)$ (rispettivamente), e controlla che questi punti sono indipendenti.

c) Determina equazioni parametriche per l'immagine, tramite φ, della retta per A e per C.

d) Determina equazioni parametriche di una retta la cui immagine, tramite φ, sia la retta per A e per B.

5.2) Nel piano proiettivo numerico reale, considera i punti $A[2,0,1]$, $B[1,1,1]$ e $C[0,1,1]$. Considera, inoltre, la proiettività φ associata all'applicazione $\varphi_l : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi_l(X_0, X_1, X_2) = (4X_0 + 2X_1 - 2X_2, -3X_0 - 7X_1 + 6X_2, -2X_0 - 8X_1 + 7X_2)$.

a) Determina equazione omogenea ed equazioni parametriche della retta r passante per A e B.

b) Determina l'immagine di A e B rispetto alla proiettività φ e equazioni parametriche dell'immagine di r tramite φ.

c) Determina l'equazione del fascio di rette per A.

d) Per ogni punto P della retta t di equazione $X_0 = 0$, denota con r_P la retta per A e per P. Definisci $\psi(P) = t \cap \varphi(r_P)$. Determina le coordinate di $\psi(P)$ e mostra che $\psi : t \to t$, $P \mapsto \psi(P)$ è una proiettività della retta t in se stessa.

e) Considera la retta s di equazione $X_0 + X_1 - X_2 = 0$. Controlla se C appartiene a s e determina l'equazione omogenea dell'immagine tramite φ di s.

f) Determina le coordinate del punto di intersezione di r e s (e tra $\varphi(r)$ e $\varphi(s)$, rispettivamente).

5.3) In $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, considera i punti: $P_0[1,1]$, $P_1[2,1]$, $P_2[0,1]$, $P_3[0,1]$.

a) In $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, verifica che i punti P_0, P_1, P_2, P_3. sono in posizione generale.

b) Determina equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $\varphi([1,0]) = P_0$, $\varphi([0,1]) = P_1$, $\varphi([1,1]) = P_2$.

c) Determina equazioni per la proiettività $\psi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $\psi(P_0) = [1,0]$, $\psi(P_1) = [0,1]$, $\psi(P_3) = [1,1]$.

5.4) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verifica che sono in posizione generale i punti: $P_0[1,3,0]$, $P_1[1,0,1]$, $P_2[0,2,0]$, $P_3[0,0,5]$.

b) Determina equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\varphi([1,0,0]) = P_1$, $\varphi([0,1,0]) = P_2$, $\varphi([0,0,1]) = P_3$, $\varphi([1,1,1]) = P_4$.

5.5) Nel piano proiettivo numerico $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, considera le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - 2X_2 = 0$ e $s : X_0 + 5X_1 = 0$ rispettivamente. Determina un cambio di coordinate omogenee $[\vec{Y}] = [M\vec{X}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.

5.6) Determina le equazioni di una proiettività non identica $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che il punto $P[1,0,1]$ sia fisso (cioè coincide con la propria immagine) e la retta r di equazione $X_1 + X_2 = 0$ sia fissa punto a punto.