5.1) In $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, sia H l'intersezione tra i sottospazi di equazione $X_0 - X_1 + X_3 = 0$ e $2X_0 - X_2 - X_3 = 0$, rispettivamente

a) Determina la dimensione di H e una base del sottospazio W di $V = \mathbf{R}^4$ tale che $H = \mathbf{P}(W)$.

b) Determina un insieme massimale di punti indipendenti in H.

c) Determina una biezione tra $\mathbf{P}(V/W)$ e la stella di piani di centro H.

5.2) Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_K$, determina l'equazione omogenea di un piano che contenga i punti $A[1, 0, 1, 0]$, $B[-1, -1, 0, 5]$, $C[4, 0, 0, 1]$. Controlla se tale piano contiene il punto $D[-8, -2, 2, 8]$.

Determina inoltre (se esiste) una retta per C sghemba con la retta proiettiva per A e B.

5.3) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (5x + 2z, y, 2x + 2z).$$

a) Verifica che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinarne il corrispondente autovalore.

b) Determina tutti gli autovalori di f e, per ciascuno di essi, una base del rispettivo autospazio. [Ricorda che puoi trovare gli autovalori studiando le radici reali del polinomio caratteristico. In questo caso, puoi riconoscere un autovalore anche osservando la matrice.]

c) Determina, se è possibile, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B}$ sia diagonale.

d) Sia W l'autospazio di autovalore 6. Determina una base di $\mathbf{R}^3/W$ e la corrispondente matrice dell'endomorfismo indotto da f passando a quoziente.

5.4) Sia data la matrice $\mathbf{A}$ (in funzione del parametro reale h):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina le radici del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ (in funzione di h).

b) Per quali valori di h gli autovalori di $\mathbf{A}$ risultano tra loro distinti?

c) Per $h = -1$, mostra che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile: determina una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori (per l moltiplicazione a sinistra per A) e una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$.

5.5) Dimostra che non esiste una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{e}_1$ sia autovettore di autovalore 2, $\mathbf{e}_2$ sia autovettore di autovalore 3, mentre $(2, 5)$ sia autovettore di autovalore 2.

5.6) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

5.7) Determinare autovettori, la relativa molteplicità algebrica e una base dei relativi autospazi per le seguenti applicazioni lineari:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, -x_1 + 7x_2),$$

$$g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = (0, 2x_1 + x_2 + 6x_3, -2x_1 - x_2 - 4x_3),$$

$h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, h(\vec{x}) = (5x_1{+}12x_2{-}6x_3, -3x_1{-}7x_2{+}3x_3, x_1{+}2x_2{-}2x_3)$(sapendo che -1 è un autovalore).