Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2011-12 quinto incontro

5.1) Considera le applicazioni lineari

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_1+x_2, 3x_2-x_3, 3x_1+x_3) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} g\colon \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_1+x_2+2x_3, x_1+x_2, x_1+x_2) \end{array}$$

a) Determina $(f+g)(3,2,1)$, $f\circ g(1,0,1)$, $g\circ f(1,0,1)$.

b) Determina la matrice di $f+g$ (risp., $f\circ g$ e $g\circ f$) rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

c) Determina una base di $Ker\,(f+g)$ (risp., $Ker\,(f\circ g)$, $Ker\,(g\circ f)$).

d) Controlla se $Ker\,(f+g)$ (risp., $Ker\,(f\circ g)$, $Ker\,(f\circ g)$) contiene $Ker\,f$ oppure $Ker\,g$.

5.2) a) Determina la dimensione dello spazio vettoriale reale $End(\mathbf{R}^3)$.

b) Considera l'isomorfismo $\Psi : End(\mathbf{R}^3) \to M(3,3,\mathbf{R})$ che associa ad ogni endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ la matrice associata ad f rispetto alla base canonica in dominio e codominio. Sia f_{ij} l'endomorfismo tale che $\Psi(f_{ij}) = E_{ij}$ (la matrice della base standard che ha tutte le entrate nulle, tranne quella di posto (i,j), che è uguale a 1). Determina le coordinate in base canonica di $f_{ij}(x_1,x_2,x_3)$.

5.3) Sia V uno spazio vettoriale e siano $f,g\in End(V)$. Mostra che $Ker\,f \subseteq Ker\,(g\circ f)$.

5.4) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Considera due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ in V. Mostra che le due classi $[\mathbf{v}_1]$ e $[\mathbf{v}_2]$ sono linearmente indipendenti in V/W se e solo se Span $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ e W sono in somma diretta.

5.5) Sia W il sottospazio vettoriale di $V=\mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1=(3,1,1,1)$, $\vec{v}_2=(0,1,-1,1)$. Considera lo spazio vettoriale quoziente V/W.

a) Esibisci 5 rappresentanti distinti per la classe $[(2,1,0,3)]$.

b) Controlla e discuti le seguenti uguaglianze: $[\mathbf{0}]=[(-6,1,-5,1)]$; $[\mathbf{0}]=[(2,5,0,1)]$; $[(2,1,0,0)]=[(5,-1,2,3)]$; $[(2,-1,1,-1)]=[(5,4,-2,4)]$.

c) Determina la dimensione e una base di V/W.

5.6) Considera l'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,2x_1-x_4)$ e denota $W=Ker\,f$. Considera inoltre il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathbf{u}_1=(-1,1,0,0)$ e $\mathbf{u}_2=(1,0,2,0)$.

a) U e $W=Kerf$ sono in somma diretta?

b) Discuti se $[\mathbf{u}_1]=[\mathbf{u}_2]$ in $\mathbf{R}^4/W$.

c) Mostra che $\overline{\mathcal{B}}=\{[\mathbf{e_1}],[\mathbf{e_4}]\}$ è una base di $\mathbf{R}^4/W$.

d) Considera l'applicazione naturale $\overline{f}:\mathbf{R}^4/W\to\mathbf{R}^2$ che fattorizza f. Determina la matrice associata a $\overline{f}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

5.7) Considera l'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1+2x_2, 3x_1+x_4+x_5)$. Denota con $\pi:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^5/Kerf$ la proiezione canonica e con $h: V/Ker\,f\to\mathbf{R}^2$ l'applicazione tale che $f=h\circ\pi$, indotta dal primo teorema fondamentale di omomorfismo.

a) Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^5/Kerf$.

b) Determina la matrice di π rispetto alla base canonica in $\mathbf{R}^5$ e alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\,f$.

c) Determina la matrice di h rispetto alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$ la matrice di h.

d) Discuti se l'applicazione $g : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$, definita da $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_4 - x_5$ fattorizza attraverso π.

e) Considera il sottospazio U' di $\mathbf{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, -2, -1, -4, 0)$. Determina una base e la dimensione di $U = \pi(U')$. Determina inoltre una base di $\pi^{-1}(U)$.

f) Discuti se la posizione $\overline{f} : \mathbf{R}^5/Ker\, f \to \mathbf{R}^2/ < (1, 0) >$, $\overline{f}[v] = [f(v)]$, definisce una applicazione lineare.

Altri esercizi

5.8) Considera una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di uno spazio vettoriale V e una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ una base di uno spazio vettoriale W sullo stesso campo. Considera l'applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in Ker(f)$.

a) Determina le coordinate (y_1, y_2) di $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3)$, rispetto alla base assegnata del codominio. Determina, inoltre, la matrice di f nelle basi assegnate.

b) Determina il nucleo di f.

5.9) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3, 6x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$$

a) Determina una base per ciascuno dei sottospazi $Ker\, f$ e $Im\, f$.

b) Determina una base e la dimensione dell'intersezione $Ker\, f \cap Im\, f$.

c) Determina una base e la dimensione di $Ker\, (f \circ f)$.

Test 1 *La rotazione di $\pi/4$ in senso orario attorno al punto $(1, 1)$:*

(a) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1 - \sqrt{2}$;

(b) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 2) + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1$;

(c) ha una retta di punti fissi.

Test 2 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ai tre piani dello spazio aventi equazioni:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - 3x_2 - x_3 = 0:$$

(a) i tre piani sono paralleli;

(b) i tre piani sono paralleli ad una stessa retta;

(c) i tre piani appartengono ad una stella impropria;

(d) l'intersezione dei tre piani è vuota;

(e) il terzo piano è ortogonale alla retta intersezione dei primi due.

Test 3 *L'affinità di equazioni:*

$$y_1 = x_1 - x_2 + 1, y_2 = x_1 + 2x_2$$

(a) ha un unico punto fisso (cioè un punto che viene mandato in se stesso) che è il punto $(-1, 1)$;

(b) non ha punti fissi;

(b) non muta in sè alcuna retta del piano;

(d) muta in sè almeno una retta del piano;

(e) ha il punto fisso $(1, -1)$.