5.1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- ogni sistema di equazioni lineari omogeneo è compatibile;
- ogni sistema di equazioni lineari è compatibile;
- un sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se ha un'unica soluzione.

5.2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- un sistema dipendente di vettori contiene il vettore nullo;
- un sistema indipendente di vettori non contiene il vettore nullo;
- un sistema indipendente di vettori non contiene vettori proporzionali,
- ogni sistema di vettori contenuto in un sistema indipendente è indipendente.

5.3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- ogni vettore che dipende da un sistema di vettori, appartiene al sistema;
- ogni vettore che appartiene ad un sistema di vettori, dipende dal sistema;
- il vettore nullo dipende da ogni sistema di vettori.

5.4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- un sistema di vettori è indipendente se e solo se ogni suo sottosistema è indipendente;
- un sistema di vettori è indipendente se e solo se qualche suo sottosistema è indipendente;
- un sistema di vettori è dipendente se e solo se ogni suo sottosistema è dipendente;
- un sistema di vettori è dipendente se e solo se qualche suo sottosistema è dipendente.

5.5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- un sistema di vettori è dipendente se esiste un vettore che è combinazione lineare in modo non unico dei vettori del sistema;
- un sistema di vettori è indipendente se esiste un vettore che è combinazione lineare in modo unico dei vettori del sistema;
- un sistema di vettori è indipendente se è possibile aggiungere un vettore in modo che il sistema ottenuto sia indipendente;
- un sistema di vettori è dipendente se, comunque si aggiunga un vettore, il sistema ottenuto è dipendente;
- un sistema di vettori è dipendente se, comunque si tolga un suo vettore, il sistema ottenuto è dipendente.

5.6) Calcola i prodotti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

5.7) Scrivi i prodotti come combinazioni lineari delle colonne del primo fattore

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.8) Verifica che $AB = AC$, ma $B \neq C$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.9) Verifica che EA è la matrice ottenuta da A scambiando la prima e la seconda riga, mentre AE è la matrice ottenuta da A scambiando la prima e la seconda colonna, ove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trova una matrice E' tale che $E'A$ sia la matrice ottenuta da A scambiando la seconda e la terza riga.

5.10) Considera due matrici quadrate di ordine tre A e B. Stabilisci se l'affermazione è vera o trova un controesempi o.

a) Se la prima e la terza colonna di B sono uguali, allora la prima e la terza colonna di AB sono uguali tra loro.

b) Se la prima e la terza colonna di A sono uguali, allora la prima e la terza colonna di AB sono uguali tra loro.

5.11) Considera il sistema di equazioni lineari a coefficienti reali in quattro incognite:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z + t = 1 \\ x - 2y + 6z - t = 5 \end{cases}$$

a) Determina matrice completa e incompleta del sistema.

b) Determina una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare, descrivendo l'insieme delle soluzioni come un traslato dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

5.12) Determina un insieme finito di generatori per il sistema di equazioni lineari omogeneo la cui matrice dei coefficienti sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5.13) Scrivi una definizione per ciascuno dei seguenti termini e confrontala con la definizione nel libro.

- sistema di vettori linearmente indipendente
- spazio vettoriale finitamente generato