Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 Quarto incontro

4.1) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2, \textit{top.euclidea})$ definiti da $A = \{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ e $B = \{(x,y)|2x^2+6y^2=1\}$.

4.2) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2, \textit{top.euclidea})$ definiti da $A = \{(x,y)|x^2+y^2=1, x \neq 0\}$ e $B = \{(x,y)|x = \pm 1\}$.

4.3) Determina un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2, \textit{top.euclidea})$ definiti da $A = \{(x,y)|x^2+y^2=1, x \neq 0\}$ e $B = \{(x,y)|x = \pm 1, -1 < y < 1\}$.

4.4) Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se verifica entrambe le seguenti proprietà:

a) f è biiettiva;

b) un sottoinsieme S è chiuso in X se e solo se $f(S)$ è chiuso in Y.

4.5) Siano X e Y spazi topologici finiti, entrambi con topologia discreta o entrambi con topologia banale. Mostra che X è omeomorfo a Y se e solo se card(X)=card(Y).

4.6) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ un suo sottospazio topologico. Per ogni sottoinsieme S di Y è possibile considerare la chiusura $\overline{S}$ di S in X e la chiusura, che denotiamo con $\overline{S}^Y$, di S in Y nella topologia indotta da X. Mostra che $\overline{S} \cap Y = \overline{S}^Y$.

4.7) Siano X e Y spazi topologici, $A \subset X$ e $B \subset Y$ sottoinsiemi. Mostrare che $A \overset{o}{\times} B = \overset{o}{A} \times \overset{o}{B}$.

4.8) Considera due applicazioni $f : X_1 \to Y_1$ e $g : X_2 \to Y_2$ tra spazi topologici. Considera inoltre l'applicazione $F : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ tra gli spazi prodotto definita da $F(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$, $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Mostra che F è continua se e solo se f e g sono continue.

4.9) Siano X un insieme e $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Esiste una unica topologia $\mathcal{U}$ su X caratterizzata dalla proprietà di essere la topologia meno fine tra le topologie su X per cui tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ sono aperti. Verifica che ogni aperto di $\mathcal{U}$ è unione di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{F}$.

4.10) Siano $\mathcal{T}_s$ e $\mathcal{T}_d$ le topologie su $\mathbf{R}$ degli intervalli aperti illimitati a sinistra , risp., a destra.

i) Mostra che l'applicazione $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ definita da $x \mapsto -x$ è continua.

ii) Mostra che una applicazione $f : X \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ è continua (e in tal caso, la chiamiamo *inferiormente semicontinua*) se e solo se $-f$ è superiormente semicontinua.