Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 quarto incontro

1.1) Mostrare che uno spazio topologico X è T_1 se e solo se, per ogni $x \in X$, l'intersezione degli intorni di x è $\{x\}$.

1.2) Mostrare che $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s)$ non è T_2 e non è T_1, ma è T_0.

1.3) Sia X uno spazio topologico T_1. Siano $S \subset X$ un sottoinsieme di X e x un punto di accumulazione per S.

i) Mostrare che, per ogni intorno U di x, l'insieme $U \cap S$ è infinito.

ii) Mostrare che il derivato $D(S)$ di S è chiuso.

1.4) Discutere se il sottoinsieme $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ è connesso.

1.5) Discutere se $Y_1 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, |y| > 0\}$ e $Y_2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \,|\, |y| > 0\}$ sono connessi.

1.6) Consideriamo $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea. Dimostrare che S^1, una coppia di circonferenze disgiunte, una coppia di circonferenze tangenti, una coppia di circonferenze secanti non sono a due a due omeomorfi.

1.7) Si consideri su $\mathbf{R}$ la topologia che ha per base gli intervalli della forma $[a, b)$, $a < b \in \mathbf{R}$. Mostrare che un sottoinsieme non vuoto S di $\mathbf{R}$ è connesso se e solo se è composto da un unico punto.

1.8) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff. Dimostrare (ad esempio utilizzando il teorema di Wallace) che, per ogni coppia di chiusi disgiunti A e B, esistono due chiusi Z e Y tali che $X = Z \cup Y$, $A \cap Z = \emptyset$, $B \cap Y = \emptyset$.

Altri esercizi:

2.1) Mostrare che se X è uno spazio topologico T_1 e finito, allora X è discreto.

2.2) Consideriamo $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea.

a) Discutere se l'unione di due rette parallele e distinte è omeomorfa all'unione di due rette incidenti.

b) Determinare il numero di componenti connesse di

$$X = \{(x, y) \,|\, x^2 + 4\,y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \,|\, x^2 - \ 3y + 2 = 0\}.$$

c) Si consideri l'applicazione continua $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = e^x + e^y$. Dire per quali dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$ la restizione di f è una applicazione chiusa:

$$X = \mathbf{R}^2, \quad Y = \{x \geq 0\}, \quad Z = \{x \geq 0, y \geq 0\}, \qquad W = \{x^2 + y^2 \leq 10\}.$$

2.3) Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice *l*ocalmente costante se , per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno J di x tale che $f(x) = f(y)$ per ogni $y \in J$. Mostra che, se X è connesso e $f : X \to \mathbf{R}$ è continua e localmente costante, allora f è costante.

2.4) Sia X uno spazio topologico. Abbiamo visto la scorsa settimana che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) l'intersezione di una qualsiasi famiglia numerabile di aperti densi è ancora un sottoinsieme denso (di X)

b) l'unione di ogni famiglia numerabile di insiemi chiusi con interno vuoto ha interno vuoto. Mostrare che tali proprietà sono equivalenti a

c) se l'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi ammette punto interno allora uno degli elementi dell'unione ha punto interno.

Mostrare inoltre che, se X gode di tali proprietà, anche ogni sottospazio aperto ne gode.