Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2016-17 esercizi

Algoritmo di Gauss-Lagrange

Problema: Data una matrice simmetrica $\mathbf{A}$ a coefficienti in un campo di caratteristica diversa da 2, determinare una matrice diagonale $\mathbf{\Delta}$ congruente a $\mathbf{A}$, cioè tale che esiste una matrice invertibile $\mathbf{A}$ con $\mathbf{P}^t\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}=\mathbf{\Delta}$. Una tale matrice $\mathbf{\Delta}$ è detta una *forma diagonale* della matrice simmetrica $\mathbf{A}$.

L'algoritmo di Gauss-Legendre fornisce un metodo effettivo per trovare una tale matrice $\mathbf{\Delta}$ (e, se si vuole, la matrice $\mathbf{P}$). Si noti anche che, quando $\mathbf{P}$ è la matrice di una trasformazione elementare, il prodotto $\mathbf{P}^t\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ fa agire la stessa trasformazione elementare sia sulle righe che sulle colonne di $\mathbf{A}$.

L'algoritmo procede come segue: sia assegnata una matrice simmetrica $\mathbf{A}$ di ordine n (con $n \geq 1$ naturale) a coefficienti in un campo di caratteristica diversa da 2.

Passo 1: se la matrice $\mathbf{A}$ ha ordine $n = 1$, allora $\mathbf{\Delta} = \mathbf{A}$ e l'algoritmo termina; altrimenti:

Passo 2: se tutte le colonne di $\mathbf{A}$ sono nulle, allora la matrice quadrata nulla di ordine n è la matrice cercata $\mathbf{\Delta}$ e l'algoritmo termina; altrimenti: individuare la colonna non nulla con indice j_1 più basso, e un suo elemento non nullo (che viene detto *pivot*) $a_{i_1 j_1}$; se $i_1 = j_1$ andare al passo 5, altrimenti proseguire con il passo 3:

Passo 3: si procede con una trasformazione elementare di prima specie sulle righe: modificare la riga di indice j_1 sommandole la riga di indice i_1 (in simboli, $R_{j_1} \mapsto R_{j_1} + R_{i_1}$);
ora si opera con una trasformazione elementare di prima specie sulle colonne: modificare la colonna di indice j_1 sommandole la colonna di indice i_1 (in simboli, $C_{j_1} \mapsto C_{j_1} + C_{i_1}$);
se, dopo queste trasformazioni, l'elemento diagonale di posto $j_1 j_1$ è non nullo, andare al passo 5; altrimenti proseguire con il passo 4;

Passo 4: ripetere il passo 3; al termine delle operazioni la teoria assicura che l'elemento diagonale di posto $j_1 j_1$ è non nullo, e si prosegue con il passo 5;

Passo 5: tramite trasformazioni elementari di prima specie, rendere nulli tutti gli elementi non diagonali della colonna j_1-esima sommando alle varie righe opportuni multipli della j_1-esima riga. *Ogni trasformazione elementare operata sulle righe, va ripetuta sulle colonne (con lo stesso ordine).* Se $n = j_1$ la matrice ottenuta coincide con $\mathbf{\Delta}$. Altrimenti, riprendere la procedura dal passo 2, studiando solo le colonne di indice $> j_1$. Si cerca la colonna non nulla di indice $j_2 > j_1$ minore possibile e si continua.

L'algoritmo termina dopo un numero finito di passi, fornendo la matrice cercata $\mathbf{\Delta}$.

Nota 1: *se si vuole ricavare in modo esplicito la matrice* $\mathbf{P}$ *tale che* $\mathbf{P}^t\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}=\mathbf{\Delta}$, *è sufficiente applicare i passi dell'algoritmo alla matrice* $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ *ottenuta affiancando la matrice* $\mathbf{A}$ *a una copia della matrice identica* $\mathbf{I}$, *ma lavorando a rendere diagonale la parte a sinistra. Al termine dell'algoritmo, si trova la matrice* $(\mathbf{\Delta}|\mathbf{P}^t)$; *per determinare la matrice* $\mathbf{P}$ *basterà quindi trasporre la matrice a destra di* $\mathbf{\Delta}$.

Nota 2: *la conoscenza di* $(\mathbf{\Delta}|\mathbf{P}^t)$ *permette di calcolare la segnatura di* $\mathbf{\Delta}$. *Si noti che la matrice* $\mathbf{A}$ *non individua in modo univoco una forma diagonale.*

Esempio: Sia assegnata la matrice quadrata simmetrica a coefficienti reali: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Si chiede di determinarne una forma diagonale $\mathbf{\Delta}$.

$$\mathbf{A} \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) j_1 = 1, \text{pivot non diagonale di posto } (2,1)$$

$$\stackrel{R_1 \mapsto R_1 + R_2}{\mapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{C_1 \mapsto C_1 + C_2}{\mapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{pivot non nullo sulla diagonale: procedo annullando i termini fuori dalla diagonale}$$

$$\stackrel{R_3 \mapsto R_3 - 3R_1}{\mapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{C_3 \mapsto C_3 - 3C_1}{\mapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) j_2 = 2, \text{pivot diagonale di posto } (2,2)$$

$$\stackrel{R_3 \mapsto R_3 + 2R_2}{\mapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{C_3 \mapsto C_3 + 2C_2}{\mapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Dunque, $\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prodotti scalari

4.1) Determina la matrice associata (rispetto alla base canonica) all'applicazione bilineare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 5x_1y_3 + x_2y_1 + 5x_3y_1 + 4x_3y_3$. L'applicazione φ è un prodotto scalare?

4.2) Determina la matrice simmetrica associata (rispetto alla base canonica) alla forma quadratica $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $\Phi(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1x_3 + +8x_2x_3 + 2x_3^2$. La forma quadratica è definita? Il prodotto scalare associato è degenere?

4.3) Considera il prodotto scalare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 7x_1y_3$. Considera inoltre i vettori $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

a) Determina la matrice associata (rispetto alla base canonica) al prodotto scalare φ.

b) Calcola $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e stabilisci se $\mathbf{u}$ è isotropo, se $\mathbf{v}$ è isotropo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.

c) Determina una base di $\mathbf{R}^3$ ortogonale per φ e contenente $\mathbf{v}$.

d) Determina due vettori isotropi per φ tra loro linearmente indipendenti.

e) La base canonica è ortogonale per φ? È possibile determinare una base ortogonale per φ e contenente $\mathbf{e}_2$?

f) Determina la segnatura e la forma canonica di Sylvester di φ.

4.4) In $\mathbf{R}^3$, considera i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$ e il prodotto scalare definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$, ove: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che il prodotto scalare è non degenere e controlla se $\mathbf{u}_1$ è isotropo.

b) Determina un vettore non nullo $\mathbf{u}'_2$ in $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$. È vero che $\mathbf{u}'_2$ è linearmente indipendente da $\mathbf{u}_1$?

c) Determina un vettore non nullo $\mathbf{u}'_3$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}'_2$. È vero che $\mathbf{u}'_3$ è linearmente indipendente da $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$? È vero che $\mathbf{u}'_3$ è ortogonale a $\mathbf{u}_2$? È vero che $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}'_3$ formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$?

d) Determina un vettore isotropo per φ. Determina, inoltre, la segnatura di φ.

4.5) In $V = \mathbf{R}^4$, considera il prodotto scalare standard. Determina una base ortonormale del sottospazio W di equazione cartesiana $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$.

4.6) Considera il prodotto scalare su $V = \mathbf{R}^4$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Considera, inoltre, il sottospazio $W = < \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$.

a) Dopo aver calcolato il rango di φ, determina la dimensione ed una base $\mathcal{B}'$ del radicale $V^\perp$ di φ e mostra che $V^\perp$ è in somma diretta con W.

b) Determina la matrice della restrizione di φ a W, rispetto alla base $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

c) Determina la matrice di φ, rispetto alla base $\mathcal{B}' \cup \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di V.

4.7) Sia φ il prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$ rappresentato, in base canonica, dalla matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Dopo aver verificato che φ è non degenere, determina equazoni cartesiane e una base dell'ortogonale $W^\perp$ di $W = < \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 >$.

b) Determina i vettori isotropi in $W^\perp$.

c) Diagonalizza φ con il metodo di Gauss-Lagrange.