Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2014-15 quarto incontro

4.1) Considera il prodotto scalare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 7x_1y_3$. Considera inoltre i vettori $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

a) Determina la matrice associata (rispetto alla base canonica) al prodotto scalare φ.

b) Calcola $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e stabilisci se $\mathbf{u}$ è isotropo, se $\mathbf{v}$ è isotropo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.

c) Determina una base di $\mathbf{R}^3$ ortogonale per φ e contenente $\mathbf{v}$.

d) Determina due vettori isotropi per φ tra loro linearmente indipendenti.

e) La base canonica è ortogonale per φ? È possibile determinare una base ortogonale per φ e contenente $\mathbf{e}_2$?

f) Determina la segnatura e la forma canonica di Sylvester di φ.

4.2) In $\mathbf{R}^3$, considera i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$ e il prodotto scalare definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che il prodotto scalare è non degenere e controlla se $\mathbf{u}_1$ è isotropo.

b) Determina un vettore non nullo $\mathbf{u}_2'$ in $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$. È vero che $\mathbf{u}_2'$ è linearmente indipendente da $\mathbf{u}_1$?

c) Determina un vettore non nullo $\mathbf{u}_3'$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}_2'$. È vero che $\mathbf{u}_3'$ è linearmente indipendente da $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$? È vero che $\mathbf{u}_3'$ è ortogonale a $\mathbf{u}_2$? È vero che $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2'$, $\mathbf{u}_3'$ formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$?

d) Determina un vettore isotropo per φ. Determina, inoltre, la segnatura di φ.

4.3) In $V = \mathbf{R}^4$, considera il prodotto scalare standard. Determina una base ortonormale del sottospazio W di equazione cartesiana $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$.

4.4) Considera il prodotto scalare su $V = \mathbf{R}^4$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Considera, inoltre, il sottospazio $W =< \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$.

a) Dopo aver calcolato il rango di φ, determina la dimensione ed una base $\mathcal{B}'$ del radicale $V^\perp$ di φ e mostra che $V^\perp$ è in somma diretta con W.

b) Determina la matrice della restrizione di φ a W, rispetto alla base $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

c) Determina la matrice di φ, rispetto alla base $\mathcal{B}' \cup \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di V.

4.5) Sia φ il prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$ rappresentato, in base canonica, dalla matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Dopo aver verificato che φ è non degenere, determina equazoni cartesiane e una base dell'ortogonale $W^\perp$ di $W =< \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 >$.

b) Determina i vettori isotropi in $W^\perp$.

c) Diagonalizza φ con il metodo di Gauss-Lagrange.