4.1) Nella retta proiettiva reale numerica, considera i punti $A[1,2]$, $B[3,-1]$, $C[-3,-1]$, $D[6,-2]$. Discuti quali di tali punti sono distinti tra loro.

4.2) Considera il piano proiettivo $\mathbf{P}^2_K$.

a) Discuti se il punto $[4,-1,2]$ appartiene al sottospazio di equazione omogenea $2X_1 + X_2 = 0$.

b) Determina un sistema di punti indipendenti che generano il sottospazio di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$.

c) Determina una equazione omogenea per la retta passante per $[1,0,3]$ e per $[2,1,-1]$ e una rappresentazione parametrica di tale retta.

d) Determina la dimensione dell'intersezione tra i sottospazi di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$ e $X_0 - 4X_2 = 0$, rispettivamente. Descrivi, inoltre, le coordinate omogenee dei punti in tale intersezione.

e) Verifica che i punti $A[1,0,7]$, $B[2,-1,5]$, $C[4,-3,1]$, $D[3,-1,12]$ sono allineati e determina una equazione omogenea della retta proiettiva r che li contiene.

4.3) In $\mathbf{P}^3_K$, sia H_1 il sottospazio di equazioni $3X_0 + X_3 = 0, 2X_1 + 3X_3 = 0, 9X_0 - 2X_1 = 0$.

a) Determina la dimensione di H_1, un sistema di equazioni normali per H_1 ed il sottospazio vettoriale associato.

b) Discuti se H_1 è sghembo rispetto al sottospazio H_2 di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$.

c) Discuti se H_1 è sghembo rispetto a H_3 di equazioni $X_0 - X_2 = 0, X_2 - X_3 = 0$.

4.4) In $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, sia H l'intersezione tra i sottospazi di equazione $X_0 - X_1 + X_3 = 0$ e $2X_0 - X_2 - X_3 = 0$, rispettivamente

a) Determina la dimensione di H e una base del sottospazio W di $V = \mathbf{R}^4$ tale che $H = \mathbf{P}(W)$.

b) Determina un insieme massimale di punti indipendenti in H.

c) Determina l'equazione della stella di piani di centro H.

4.5) Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_K$, determina l'equazione omogenea di un piano che contenga i punti $A[1,0,1,0]$, $B[-1,-1,0,5]$, $C[4,0,0,1]$. Controlla se tale piano contiene il punto $D[-8,-2,2,8]$.

Determina inoltre (se esiste) una retta per C sghemba con la retta proiettiva per A e B.

Segna tutte e sole le risposte giuste:

Test 1 *La retta di equazioni parametriche:*

$$x_1 = 4 + t, x_2 = -t, x_3 = 3 + 2t, \quad t \in \mathbf{R}$$

(a) passa il punto $(1,-1,1)$*;*

(b) è ortogonale al piano di equazione $x_1 - x_2 + 2x_3 = 100$*;*

(c) ha distanza $\sqrt{73}/3$ *dall'origine;*

(d) è contenuta nel piano di equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$*.*

Test 2 *Si consideri la retta* r *dello spazio di equazioni*

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 + 1 = 0$$

e la retta s *passante per i punti* $(1,1,1)$ *e* $(-1,0,2)$*.*

(a) r e s sono parallele;

(b) r e s appartengono al piano di equazione $x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 1 = 0$.

(c) r e s sono sghembe.

Test 3 *La rotazione di $\pi/4$ in senso orario attorno al punto $(1,1)$:*

(a) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+1-\sqrt{2}$;

(b) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-2)+1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+1$;

(c) ha una retta di punti fissi (cioè una retta di punti che coincidono con la propria immagine).

Test 4 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ai tre piani dello spazio aventi equazioni:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - 3x_2 - x_3 = 0:$$

(a) i tre piani sono paralleli;

(b) i tre piani sono paralleli ad una stessa retta;

(c) i tre piani appartengono ad una stella impropria;

(d) l'intersezione dei tre piani è vuota;

(e) il terzo piano è ortogonale alla retta intersezione dei primi due.