Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2010-11 quarta settimana

Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale e sia fissato il punto $Q(i,-1)$.

4.1) Determina la distanza tra $P(2-i,3)$ e Q.

4.2) Detemina l'equazione parametrica per ogni retta isotropa passante per Q.

4.3) Sia r una retta isotropa passante per Q. Tale retta ha punti reali?

4.4) Due rette si dicono ortogonali se hanno vettori direttori ortogonali. Determina equazioni cartesiane per la retta s per Q e ortogonale alla retta $2x-(2+7i)y+5=0$.

4.5) Discuti se il cambio di riferimento $x' = \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y + 6 - 2i, y' = \frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{1}{3}y + 2$ è un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali.

Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale.

4.6) Determina i vettori isotropi paralleli al piano π di equazione $3x_1 - x_2 = 0$.

4.7) Determina le rette isotrope per $P(0,-5i,0)$ e contenute nel piano π di equazione cartesiana $2ix_1 + 2x_3 = 0$.

4.8) Determina i piani isotropi passanti per la retta r di equazioni $\frac{x_1-3}{2i} = \frac{x_2-(3+2i)}{-1} = \frac{x_3-(45+5i)}{\sqrt{3}}$. Determina inoltre l'equazione del fascio di piani per r.

4.9) Determina i piani isotropi per la retta r passante per $A(1,-12i,5)$ e parallela al vettore di componenti $(2,0,7i)$.

4.10) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(2,3-i)$ e raggio $3i$.

4.11) Determina centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+y^2-x+3=0$. Determina inoltre i punti di intersezione tra $\mathcal{C}$ e la retta di equazione $x=2$. È possibile determinare $k \in \mathbf{C}$ tale che la retta di equazione $x=k$ sia tangente a $\mathcal{C}$?

Alcuni esercizi di algebra lineare:

4.4) Verifica se le seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4.5) Completa la seguente matrice in modo che sia ortogonale con determinante 1:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & * \end{pmatrix}.$$

Considera l'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ in sè, che ha B come matrice associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio. L'applicazione f è la rotazione antioraria di quale angolo?

4.6) Determinare la dimensione ed una base di Ker f e Im f, ove $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è definita da $f(x,y,z) = (x+3z, 2x+y+z, 3x+y+4z)$. Determinare inoltre la matrice associata a f nella base $\vec{v}_1 = (-3,5,1), \vec{v}_2 = (1,1,0), \vec{v}_3 = (1,0,0)$.

4.7) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ definita da $f(\vec{e}_1) = (1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,2,0,1)$, $f(\vec{e}_3) = (-1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_4) = (1,1,0,1)$. Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$.

a) Mostrare che $f(W) \subset W$.

b) Determinare la matrice B di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

c) Che particolarità ha la matrice B? Osservare che il riferimento $\mathcal{B}$ è completamento di un riferimento di W.

4.8) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1 = (3,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,1)$. Completare $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ad riferimento $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$.

Segna tutte e sole le risposte giuste:

Test 1 *La retta di equazioni parametriche:*

$$x_1 = 4 + t, x_2 = -t, x_3 = 3 + 2t, \quad t \in \mathbf{R}$$

(a) passa il punto $(1,-1,1)$*;*

(b) è ortogonale al piano di equazione $x_1 - x_2 + 2x_3 = 100$*;*

(c) ha distanza $\sqrt{73}/3$ *dall'origine;*

(d) è contenuta nel piano di equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$*.*

Test 2 *Si consideri la retta* r *dello spazio di equazioni*

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 + 1 = 0$$

e la retta s *passante per i punti* $(1,1,1)$ *e* $(-1,0,2)$*.*

(a) r *e* s *sono parallele;*

(b) r *e* s *appartengono al piano di equazione* $x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 1 = 0$*.*

(c) r *e* s *sono sghembe.*