4.1) In $\mathbf{R}^4$ considera i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mostra che:

a) l'insieme formato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è linearmente indipendente.

b) l'insieme formato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ è linearmente indipendente.

c) il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ è contenuto nel sottospazio generato dai vettori unitari $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$.

d) determina i coefficienti di una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ uguale a $\mathbf{v}_4$.

4.2) a) Mostra che i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x. Per ciascuno di essi mostra che non è finitamente generato.

$$U = \{(x^2 - 2)p(x) \,|\, p(x) \in \mathbf{R}[x]\}$$

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}[x] \,|\, p(1) = 0\}$$

b) Determina l'intersezione $U \cap W$ dei sottospazi definiti nel punto precedente.

4.3) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}[x]$, considera il sottospazio Z generato da $p_1(x) = 3x^4 - 2x^2 - 1$ e da $p_2(x) = 5x^5 - 7x^3 + 2$.

a) Verifica quali dei seguenti polinomi appartengono a Z:

$q_1(x) = x$, $q_2(x) = 12x^4 - 8x^2 - 4$, $q_3(x) = 5x^5 + 6x^4 - 7x^3 - 4x^2$, $q_4(x) = 10x^5 - 6x^4 - 14x^3 + 4x^2 + 6$.

In caso positivo, scrivi il polinomio come combinazione lineare di $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

b) Controlla se l'insieme $\{p_1(x), p_2(x)\}$ è linearmente indipendente.

c) Dimostra che Z è sottospazio vettoriale di $W = \{p(x) \in \mathbf{R}[x] \,|\, p(1) = 0\}$.

d) Determina l'intersezione tra Z e il sottospazio $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ formato dai polinomi di $\mathbf{R}[x]$ di grado minore o uguale a 3.

4.4) Sia V uno spazio vettoriale e sia S un sottoinsieme finito di V.

a) Dimostra che, se S contiene il vettore nullo, allora S è linearmente dipendente.

b) Dimostra che, se S contiene un sottoinsieme T linearmente dipendente, allora S è linearmente dipendente.

c) Determina un esempio esplicito in cui S è linearmente dipendente, ma contiene un sottoinsieme Z linearmente indipendente.

d) Mostra che, se S è linearmente dipendente ed è formato da due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, allora almeno uno dei due vettori è multiplo scalare dell'altro (e diciamo che è proporzionale all'altro).

4.5) Considera le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcola $3A - 5B$, la trasposta A^t di A, la trasposta B^t di B. Inoltre, confronta la trasposta $(3A-5B)^t$ con $3A^t - 5B^t$.

b) Mostra che A e B formano un insieme linearmente indipendente di matrici.

4.6) Completa la seguente matrice in modo che sia simmetrica: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$

4.7) Considera le seguenti definizioni:

- Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
- Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ si dice *scalare* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, e $a_{ii} = a_{jj}$ per ogni i, j.
- Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è *triangolare superiore* (o *triangolare alta*) se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$.

e considera i seguenti sottoinsiemi del $\mathbf{K}$-spazio vettoriale $M(n, n, \mathbf{K})$ delle matrici quadrate di ordine fissato $n > 0$, a coefficienti in un campo $\mathbf{K}$: il sottoinsieme $\mathcal{D}$ formato da tutte le matrici diagonali, il sottoinsieme $\mathcal{S}$ formato da tutte le matrici scalari, il sottoinsieme $\mathcal{T}$ formato da tutte le matrici triangolari superiori.

a) Per $n = 3$ e $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, fai un esempio di una matrice diagonale, una matrice scalare, una matrice triangolare superiore.

b) Mostra che $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sottospazi vettoriali dello spazio delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbf{K}$ e determina un insieme finito di generatori per ciascuno di essi.

c) Determina $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$. Determina, inoltre, l'intersezione tra $\mathcal{T}$ e il sottospazio delle matrici simmetriche in $M(n, n, \mathbf{K})$.

4.8) Scrivi una definizione per ciascuno dei seguenti termini e confrontala con la definizione nel libro.

- vettore geometrico libero
- spazio vettoriale
- sottospazio vettoriale
- sottospazio vettoriale generato da un insieme