Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2012-13 quarta settimana

4.1) Nella retta proiettiva reale numerica, considera i punti $A[1, 2]$, $B[3, -1]$, $C[-3, -1]$, $D[6, -2]$. Discuti quali di tali punti sono distinti tra loro.

4.2) Considera il piano proiettivo $\mathbf{P}^2_K$.

a) Discuti se il punto $[4, -1, 2]$ appartiene al sottospazio di equazione omogenea $2X_1 + X_2 = 0$.

b) Determina un sistema di punti indipendenti che generano il sottospazio di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$.

c) Determina una equazione omogenea per la retta passante per $[1, 0, 3]$ e per $[2, 1, -1]$ e una rappresentazione parametrica di tale retta.

d) Determina la dimensione dell'intersezione tra i sottospazi di equazione $3X_0 - X_1 + X_2 = 0$ e $X_0 - 4X_2 = 0$, rispettivamente. Descrivi, inoltre, le coordinate omogenee dei punti in tale intersezione.

e) Verifica che i punti $A[1, 0, 7]$, $B[2, -1, 5]$, $C[4, -3, 1]$, $D[3, -1, 12]$ sono allineati e determina una equazione omogenea della retta proiettiva r che li contiene.

4.3) In $\mathbf{P}^3_K$, sia H_1 il sottospazio di equazioni $3X_0 + X_3 = 0, 2X_1 + 3X_3 = 0, 9X_0 - 2X_1 = 0$.

a) Determina la dimensione di H_1, un sistema di equazioni normali per H_1 ed il sottospazio vettoriale associato.

b) Discuti se H_1 è sghembo rispetto al sottospazio H_2 di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$.

c) Discuti se H_1 è sghembo rispetto a H_3 di equazioni $X_0 - X_2 = 0, X_2 - X_3 = 0$.

4.4) Considera le applicazioni lineari

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1 + x_2, 3x_2 - x_3, 3x_1 + x_3) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} g\colon \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2) \end{array}$$

a) Determina $(f + g)(3, 2, 1)$, $f \circ g(1, 0, 1)$, $g \circ f(1, 0, 1)$.

b) Determina la matrice di $f + g$ (risp., $f \circ g$ e $g \circ f$) rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

c) Determina una base di $Ker\,(f + g)$ (risp., $Ker\,(f \circ g)$, $Ker\,(g \circ f)$).

d) Controlla se $Ker\,(f + g)$ (risp., $Ker\,(f \circ g)$, $Ker\,(f \circ g)$) contiene $Ker\,f$ oppure $Ker\,g$.

4.5) a) Determina la dimensione dello spazio vettoriale reale $End(\mathbf{R}^3)$.

b) Considera l'isomorfismo $\Psi : End(\mathbf{R}^3) \to M(3, 3, \mathbf{R})$ che associa ad ogni endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ la matrice associata ad f rispetto alla base canonica in dominio e codominio. Sia f_{ij} l'endomorfismo tale che $\Psi(f_{ij}) = E_{ij}$ (la matrice della base standard che ha tutte le entrate nulle, tranne quella di posto (i, j), che è uguale a 1). Determina le coordinate in base canonica di $f_{ij}(x_1, x_2, x_3)$.

4.6) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (3x + 3y - 11z, -6x - 4y + 9z, y - 4z)$$

e il sottospazio W generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$.

a) Controlla che W è f-invariante.

b) Completa $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e determina la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$.

4.7) Sia f un endomorfismo in uno spazio vettoriale V. Supponi che $V = W \oplus U$ per opportuni sottospazi f-invarianti W e U, che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ sia una base di W e $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ una base di U.

a) Discuti le caratteristiche della matrice che rappresenta f nella base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$.

b) Discuti le caratteristiche della matrice che rappresenta f in una base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$.

4.8) Considera l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (-3x - 5y, 2y, 5y - 3z).$$

a) Per ciascuno dei vettori della base canonica, controlla se è un autovettore e, in caso positivo, quale ne sia l'autovalore corrispondente.

b) Verifica che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore e determinane il corrispondente autovalore.

c) Determina una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori e la corrispondente matrice di f in tale base. Cosa succede cambiando l'ordine dei vettori in tale base?

4.9) Mostra che $f : V \to V$ è una omotetia se e solo se ogni sottospazio è f-invariante.