Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 3 a.a. 2011-12 Terzo incontro

3.1) In $\mathbf{R}$ considera la topologia $\mathcal{U}$ così definita: $U \subset \mathbf{R}$ è aperto se e solo se per ogni $s \in U$ esiste $t \in \mathbf{R}$ con $s < t$ e $[s, t) \subset U$.

a) Mostra che $\mathcal{U}$ è una topologia.

b) Per ogni $a < b \in \mathbf{R}$, determina chiusura, interno e frontiera di $[a, b)$ (e di $(a, b]$).

c) $\mathcal{U}$ è meno fine (o più fine, o non confrontabile) della topologia euclidea?

3.2) Considera un sottoinsieme A di uno spazio topologico $(X, \mathcal{U})$. Mostra che

i) A e $X \setminus A$ hanno la stessa frontiera.

ii) $\mathring{A}$, $(X \overset{o}{\setminus} A)$ e la frontiera di A sono sottoinsiemi a due a due disgiunti. La loro unione è X.

iii) se A è denso, allora $(X \overset{o}{\setminus} A)$ è vuoto.

iv) la frontiera di $\overline{A}$ è contenuta nella frontiera di A.

v) la frontiera di $\mathring{A}$ è contenuta nella frontiera di A.

3.3) Mostra che una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se verifica entrambe le seguenti proprietà:

a) f è biiettiva;

b) un sottoinsieme S è chiuso in X se e solo se $f(S)$ è chiuso in Y.

3.4) Sia X uno spazio topologico; su $\mathbf{R}$ si consideri la topologia euclidea. Data una funzione continua $f : X \to \mathbf{R}$ tale che $f(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, mostra che $1/f : X \to \mathbf{R}, x \to 1/f(x)$ è continua.

3.5) Sia $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (Y, \mathcal{U}_Y)$ una applicazione continua tra spazi topologici; mostra che, se $\mathcal{U}^*_Y$ è una topologia su Y meno fine di $\mathcal{U}_Y$, allora anche $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (Y, \mathcal{U}^*_Y)$ è continua.

È vero che, se $\mathcal{U}^*_X$ è una topologia su X meno fine di $\mathcal{U}_X$, allora anche $f : (X, \mathcal{U}^*_X) \to (Y, \mathcal{U}_Y)$ è continua?

3.6) In uno spazio topologico sono equivalenti:

a) la intersezione di ogni famiglia di aperti è un aperto.

b) la unione di ogni famiglia di chiusi è un chiuso

c) la famiglia dei chiusi è la famiglia degli aperti in una topologia (eventualmente differente da quella assegnata).

3.7) Sia $f : X \to \mathbf{R}$ una applicazione continua da uno spazio topologico X alla retta reale dotata di topologia euclidea. Mostra che, per ogni $x \in X$ con $f(x) \neq 0$, esiste un aperto U di X contenente x tale che $f(y) \neq 0 \ \forall y \in U$.