Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 Terzo incontro

1.1) Siano X e Y spazi topologicifiniti, entrambi con top. discreta o entrambi con top. banale. Mostrare che X è omeomorfo a Y se e solo se card(X)=card(Y).

1.2) Siano X e Y spazi topologici, $A \subset X$ e $B \subset Y$ sottoinsiemi. Mostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare, se A e B sono chiusi, $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

1.3) Mostrare che gli intervalli $[0,1)$ e $[0,1]$ non sono omeomorfi (come sottospazi della retta reale euclidea).

1.4) Completare la dimostrazione che un sottospazio chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$, con topologia euclidea, è compatto.

1.5) Sia (X,d) uno spazio metrico.

i) Mostrare che l'applicazione $d : X \times X \to \mathbf{R}$ è continua.

ii) Mostrare che ogni sottoinsieme compatto e' chiuso e limitato.

iii) Esibire uno spazio metrico (X,d) ed un sottoinsieme S chiuso e limitato che non sia compatto.

1.6) Siano $\mathcal{T}_s$ e $\mathcal{T}_d$ le topologie su $\mathbf{R}$ degli intervalli aperti illimitati a sinistra , risp., a destra.

i) Mostra che l'applicazione $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ definita da $x \mapsto -x$ è continua.

ii) Mostra che una applicazione $f : X \to \mathbf{R}$ è superiormente semicontinua se e solo se l'insieme $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ risulta aperto in X per ogni $a \in \mathbf{R}$.

iii) Mostra che una applicazione $f : X \to \mathbf{R}$ è inferiormente semicontinua se e solo se $-f$ è superiormente semicontinua.

1.7) Sia $\{Y_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X. Allora $\cup_{j \in J}(X \setminus Y_j) = X \setminus (\cap Y_j)$.

1.8) Diciamo che la famiglia $\{Y_j\}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* se per ogni sottoinsieme finito A di J, l'intersezione $\cap_{\alpha \in A} Y_\alpha$ è non vuota. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) X è compatto, cioè ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

ii) ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota, contiene una famiglia finita la cui intersezione è vuota.

iii) ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

1.9) Mostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se, per ogni $x \in X$, l'intersezione degli intorni chiusi di x coincide con $\{x\}$.

1.10) Sia X uno spazio topologico. Mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) l'intersezione di una qualsiasi famiglia numerabile di aperti densi è ancora un sottoinsieme denso (di X)

b) l'unione di ogni famiglia numerabile di insiemi chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.