UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2013-14 terza settimana

3.1) Considera il prodotto scalare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 7x_1y_3$. Considera inoltre i vettori $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

a) Determina la matrice associata (rispetto alla base canonica) al prodotto scalare φ.

b) Calcola $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e stabilisci se $\mathbf{u}$ è isotropo, se $\mathbf{v}$ è isotropo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.

c) Determina una base di $\mathbf{R}^3$ ortogonale per φ e contenente $\mathbf{v}$.

d) Determina due vettori isotropi per φ tra loro linearmente indipendenti.

e) La base canonica è ortogonale per φ?

f) È possibile determinare una base ortogonale per φ e contenente $\mathbf{e}_2$?

3.2) In $\mathbf{R}^3$, considera i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$ e il prodotto scalare definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Verifica che il prodotto scalare è non degenere e controlla se $\mathbf{u}_1$ è isotropo.

b) Determina un vettore non nullo $\mathbf{u}'_2$ in $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$. È vero che $\mathbf{u}'_2$ è linearmente indipendente da $\mathbf{u}_1$?

c) Determina un vettore non nullo $\mathbf{u}'_3$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}'_2$.

È vero che $\mathbf{u}'_3$ è linearmente indipendente da $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$?

È vero che $\mathbf{u}'_3$ è ortogonale a $\mathbf{u}_2$?

È vero che $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}'_3$ formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$?

d) Determina un vettore isotropo per φ.

3.3) In $\mathbf{R}^3$, considera i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, -1)$ e il prodotto scalare definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Controlla se $\mathbf{u}_1$ è isotropo.

b) Verifica che $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)}{\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1$ è ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e che $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >=< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_2 >$. Controlla se $\mathbf{u}'_2$ è isotropo.

c) Verifica che $\mathbf{u}'_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3)}{\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 - \frac{\varphi(\mathbf{u}'_2,\mathbf{u}_3)}{\varphi(\mathbf{u}'_2,\mathbf{u}'_2)}\mathbf{u}'_2$ è ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}'_2$. Deduci che $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}'_3$ formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ rispetto a φ.

d) Il vettore $\mathbf{u}''_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3)}{\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 - \frac{\varphi(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}{\varphi(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2$ è ortogonale a $\mathbf{u}_1$? e a $\mathbf{u}_2$?

3.4) **Procedimento di Gram-Schmidt** Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare φ **privo di vettori isotropi**. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori non nulli di V.

Definisci, ricorsivamente, $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n$ tramite la posizione:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1\\
&\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \tfrac{\varphi(\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}_2)}{\varphi(\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}'_1)}\mathbf{v}'_1\\
&\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - \tfrac{\varphi(\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}_3)}{\varphi(\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}'_1)}\mathbf{v}'_1 - \tfrac{\varphi(\mathbf{v}'_2,\mathbf{v}_3)}{\varphi(\mathbf{v}'_2,\mathbf{v}'_2)}\mathbf{v}'_2\\
&\mathbf{v}'_4 = \mathbf{v}_4 - \tfrac{\varphi(\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}_4)}{\varphi(\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}'_1)}\mathbf{v}'_1 - \tfrac{\varphi(\mathbf{v}'_2,\mathbf{v}_4)}{\varphi(\mathbf{v}'_2,\mathbf{v}'_2)}\mathbf{v}'_2 - \tfrac{\varphi(\mathbf{v}'_3,\mathbf{v}_4)}{\varphi(\mathbf{v}'_3,\mathbf{v}'_3)}\mathbf{v}'_3\\
&\ldots
\end{aligned}$$

a) Mostra che $\mathbf{v}'_i$ è ortogonale a $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{i-1}$, per ogni $i = 2, \ldots, n$ e che $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n$ è una base ortogonale per V.

b) Mostra che il procedimento funziona anche se φ ha vettori isotropi, purché i vettori che si ottengono nel procedimento non risultino isotropi.

c) Definisci $\mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_i^{(1)} = \mathbf{v}_i - \frac{\varphi(\mathbf{v}_1^{(1)},\mathbf{v}_i)}{\varphi(\mathbf{v}_1^{(1)},\mathbf{v}_1^{(1)})}\mathbf{v}_1^{(1)}$ per $i = 2, \ldots, n$. Mostra che i vettori $\mathbf{v}_2^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_n^{(1)}$ sono tutti ortogonali a $\mathbf{v}_1^{(1)}$.

Definisci $\mathbf{v}_1^{(2)} = \mathbf{v}_1^{(1)}$, $\mathbf{v}_2^{(2)} = \mathbf{v}_2^{(1)}$ e $\mathbf{v}_i^{(2)} = \mathbf{v}_i^{(1)} - \frac{\varphi(\mathbf{v}'_2,\mathbf{v}'_i)}{\varphi(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1$ per $i = 3, \ldots, n$. Mostra che i vettori $\mathbf{v}_3^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}_n^{(2)}$ sono tutti ortogonali a $\mathbf{v}_1^{(2)}$ e a $\mathbf{v}_2^{(2)}$.

Procedi in modo analogo: al j-mo passo, mantieni i primi j vettori e modifica i successivi, sottraendo la componente parallela. Mostra che i vettori trovati attraverso questa procedura sono una base ortogonale, e coincidono con $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n$.

3.5) Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare φ. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori non nulli di V.

a) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono a due a due ortogonali, è possibile dedurre che sono anche linearmente indipendenti?

b) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono una base ortogonale, è possibile dedurre che φ è non degenere?

c) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono una base ortogonale e φ è non degenere, è possibile dedurre che φ ammette anche una base ortonormale?

d) Se φ è non degenere, posso dedurre che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ non sono tutti isotropi? e che V contenga almeno un vettore non isotropo?

3.6) Considera il prodotto scalare su $V = \mathbf{R}^4$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Considera, inoltre, il sottospazio $W = < \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$.

a) Determina il rango di φ.

b) Determina la dimensione ed una base $\mathcal{B}'$ del radicale $V^\perp$ di φ.

c) Mostra che $V^\perp$ è in somma diretta con W.

d) Determina la matrice della restrizione di φ a W, rispetto alla base $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

e) Determina la matrice di φ, rispetto alla base $\mathcal{B}' \cup \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di V.

Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale e sia fissato il punto $Q(i,-1)$.

3.7) Determina la distanza tra $P(2-i,3)$ e Q.

3.8) Detemina l'equazione parametrica per ogni retta isotropa passante per Q.

3.9) Sia r una retta isotropa passante per Q. Tale retta ha punti reali?

3.10) Determina equazioni cartesiane per la retta s per Q e ortogonale alla retta $2x-(2+7i)y+5=0$.

3.11) Discuti se il cambio di riferimento $x' = \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y + 6 - 2i, y' = \frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{1}{3}y + 2$ è un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali.

Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale.

3.6) Determina i vettori isotropi paralleli al piano π di equazione $3x_1 - x_2 = 0$.

3.7) Determina le rette isotrope per $P(0,-5i,0)$ e contenute nel piano π di equazione cartesiana $2ix_1 + 2x_3 = 0$.

3.8) Determina i piani isotropi passanti per la retta r di equazioni $\frac{x_1-3}{2i} = \frac{x_2-(3+2i)}{-1} = \frac{x_3-(45+5i)}{\sqrt{3}}$. Determina inoltre l'equazione del fascio di piani per r.

3.9) Determina i piani isotropi che contengono la retta r passante per $A(1,-12i,5)$ e parallela al vettore di componenti $(2,0,7i)$.