Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2012-13 terza settimana

Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale e sia fissato il punto $Q(i,-1)$.

3.1) Determina la distanza tra $P(2-i,3)$ e Q.

3.2) Detemina l'equazione parametrica per ogni retta isotropa passante per Q.

3.3) Sia r una retta isotropa passante per Q. Tale retta ha punti reali?

3.4) Due rette si dicono ortogonali se hanno vettori direttori ortogonali. Determina equazioni cartesiane per la retta s per Q e ortogonale alla retta $2x-(2+7i)y+5=0$.

3.5) Discuti se il cambio di riferimento $x'=\frac{1}{3}x-\frac{\sqrt{8}}{3}y+6-2i, y'=\frac{\sqrt{8}}{3}x+\frac{1}{3}y+2$ è un cambio di riferimento tra riferimenti ortonormali.

Nello spazio complessificato, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ reale ortonormale.

3.6) Determina i vettori isotropi paralleli al piano π di equazione $3x_1-x_2=0$.

3.7) Determina le rette isotrope per $P(0,-5i,0)$ e contenute nel piano π di equazione cartesiana $2ix_1+2x_3=0$.

3.8) Determina i piani isotropi passanti per la retta r di equazioni $\frac{x_1-3}{2i}=\frac{x_2-(3+2i)}{-1}=\frac{x_3-(45+5i)}{\sqrt{3}}$. Determina inoltre l'equazione del fascio di piani per r.

3.9) Determina i piani isotropi per la retta r passante per $A(1,-12i,5)$ e parallela al vettore di componenti $(2,0,7i)$.

3.10) Determinare la dimensione ed una base di Ker f e Im f, ove $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ è definita da $f(x,y,z)=(x+3z,2x+y+z,3x+y+4z)$. Determinare inoltre la matrice associata a f nella base $\vec{v}_1=(-3,5,1),\vec{v}_2=(1,1,0),\vec{v}_3=(1,0,0)$.

3.11) Sia $f:\mathbf{R}^4\to:\mathbf{R}^4$ definita da $f(\vec{e}_1)=(1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_2)=(1,2,0,1)$, $f(\vec{e}_3)=(-1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_4)=(1,1,0,1)$. Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$.

a) Mostrare che $f(W)\subset W$.

b) Determinare la matrice B di f nel riferimento $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_4)$.

c) Che particolarità ha la matrice B? Osservare che il riferimento $\mathcal{B}$ è completamento di un riferimento di W.

3.12) Sia W il sottospazio vettoriale di $V=\mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1=(3,1,1,1)$, $\vec{v}_2=(0,1,-1,1)$. Completare $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ad riferimento $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$.

3.13) Sia V uno spazio vettoriale e siano $f,g\in End(V)$. Mostra che $Ker\,f\subseteq Ker\,(g\circ f)$.

3.14) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Considera due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ in V. Mostra che le due classi $[\mathbf{v}_1]$ e $[\mathbf{v}_2]$ sono linearmente indipendenti in V/W se e solo se Span $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ e W sono in somma diretta.

3.15) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1 = (3,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,1)$. Considera lo spazio vettoriale quoziente V/W.

a) Esibisci 5 rappresentanti distinti per la classe $[(2,1,0,3)]$.

b) Controlla e discuti le seguenti uguaglianze: $[\mathbf{0}] = [(-6,1,-5,1)]$; $[\mathbf{0}] = [(2,5,0,1)]$; $[(2,1,0,0)] = [(5,-1,2,3)]$; $[(2,-1,1,-1)] = [(5,4,-2,4)]$.

c) Determina la dimensione e una base di V/W.

3.16) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1, 2x_1 - x_4)$ e denota $W = Ker\, f$. Considera inoltre il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0,0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,0,2,0)$.

a) U e $W = Kerf$ sono in somma diretta?

b) Discuti se $[\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_2]$ in $\mathbf{R}^4/W$.

c) Mostra che $\overline{\mathcal{B}} = \{[\mathbf{e_1}], [\mathbf{e_4}]\}$ è una base di $\mathbf{R}^4/W$.

d) Considera l'applicazione naturale $\overline{f} : \mathbf{R}^4/W \to \mathbf{R}^2$ che fattorizza f. Determina la matrice associata a $\overline{f}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

3.17) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_4 + x_5)$. Denota con $\pi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5/Kerf$ la proiezione canonica e con $h : V/Ker\, f \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione tale che $f = h \circ \pi$, indotta dal primo teorema fondamentale di omomorfismo.

a) Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^5/Kerf$.

b) Determina la matrice di π rispetto alla base canonica in $\mathbf{R}^5$ e alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$.

c) Determina la matrice di h rispetto alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$ la matrice di h.

d) Discuti se l'applicazione $g : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$, definita da $g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_4 - x_5$ fattorizza attraverso π.

e) Considera il sottospazio U' di $\mathbf{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,-1,1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,-2,-1,-4,0)$. Determina una base e la dimensione di $U = \pi(U')$. Determina inoltre una base di $\pi^{-1}(U)$.

f) Discuti se la posizione $\overline{f} : \mathbf{R}^5/Ker\, f \to \mathbf{R}^2/ < (1,0) >$, $\overline{f}[v] = [f(v)]$, definisce una applicazione lineare.

Segna tutte e sole le risposte giuste:

Test 1 *La retta di equazioni parametriche:*

$$x_1 = 4 + t, x_2 = -t, x_3 = 3 + 2t, \quad t \in \mathbf{R}$$

(a) passa il punto $(1,-1,1)$*;*

(b) è ortogonale al piano di equazione $x_1 - x_2 + 2x_3 = 100$*;*

(c) ha distanza $\sqrt{73}/3$ *dall'origine;*

(d) è contenuta nel piano di equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$*.*

Test 2 *Si consideri la retta* r *dello spazio di equazioni*

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 + 1 = 0$$

e la retta s *passante per i punti* $(1,1,1)$ *e* $(-1,0,2)$*.*

(a) r *e* s *sono parallele;*

(b) r e s appartengono al piano di equazione $x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 1 = 0$.

(c) r e s sono sghembe.

Test 3 *La rotazione di $\pi/4$ in senso orario attorno al punto $(1,1)$:*

(a) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+1-\sqrt{2}$;

(b) ha equazioni $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-2)+1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+1$;

(c) ha una retta di punti fissi.

Test 4 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ai tre piani dello spazio aventi equazioni:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - 3x_2 - x_3 = 0:$$

(a) i tre piani sono paralleli;

(b) i tre piani sono paralleli ad una stessa retta;

(c) i tre piani appartengono ad una stella impropria;

(d) l'intersezione dei tre piani è vuota;

(e) il terzo piano è ortogonale alla retta intersezione dei primi due.

Test 5 *L'affinità di equazioni:*

$$y_1 = x_1 - x_2 + 1, y_2 = x_1 + 2x_2$$

(a) ha un unico punto fisso (cioè un punto che viene mandato in se stesso) che è il punto $(-1,1)$;

(b) non ha punti fissi;

(b) non muta in sè alcuna retta del piano;

(d) muta in sè almeno una retta del piano;

(e) ha il punto fisso $(1,-1)$.