Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2011-12 terza settimana

Nello spazio complesso, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$. Con "discutere la mutua posizione tra due rette $r$ e $s$" si intende "determinare se la retta $r$ è complanare (e, in tal caso, se è parallela o incidente) o sghemba a $s$".

3.1) Determinare equazioni cartesiane a coefficienti reali di una retta reale $r$ passante per $P(2, 3-i, 6i)$.

3.2) Sia $r$ la retta di equazioni cartesiane:

$$3ix_1 + x_2 + (5+18i)x_3 - (7+27i) = 0, x_1 + ix_2 + (6+5i)x_3 - 9 - 7i = 0.$$

Determinare un vettore direttore della retta $r$ e discutere se la giacitura della retta è reale.

3.3) Determinare se il piano $\pi$ di equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 + i = 0$ ha punti reali. Sia $\pi$ il piano di equazione cartesiana $3ix_1 - 5x_2 + (2-i)x_3 + 5 = 0$.

a) Determinare una base della giacitura e equazioni parametriche per $\pi$.

b) Determinare una descrizione parametrica di $\pi \cap \overline{\pi}$, discutendo se il piano $\pi$ è reale.

3.4) Il piano $\alpha$ (rispettivamente, $\beta$) ha equazione cartesiana $x_1 - x_2 + ix_3 + 5 = 0$ (risp., $x_1 + ix_2 + ix_3 + 3 = 0$).

a) Usando i minori, determinare un vettore direttore per la retta $r = \alpha \cap \beta$.

b) Determinare la posizione relativa tra $r$ e la coniugata $\overline{r}$.

3.5) Siano fissati il punto $P(3+i, 2-i, -3+2i)$ e i piani $\alpha$ e $\beta$ di equazione cartesiana, rispettivamente,

$$\alpha : (2i-3)x_1 + ix_2 + x_3 - 4i + 1 = 0, \quad \beta : -3ix_1 + ix_3 + 1 = 0.$$

a) Determinare equazioni cartesiane reali di una retta reale $s$ passante per $P$, se essa esiste.

b) Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Se tale piano non esiste, motivare la risposta.

c) Determinare l'equazione del fascio di piani paralleli a $\alpha$.

d) Discutere se il piano $\alpha$ è reale e determinare un vettore parallelo sia ad $\alpha$ che ad $\overline{\alpha}$.

e) Discutere se la giacitura di $\beta$ è reale. Qual'è l'intersezione tra $\beta$ e il coniugato $\overline{\beta}$?

3.6) Sia $r$ la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 + (2i-3)x_2 + 2ix_3 + i = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 - i = 0.$$

a) Discutere la posizione relativa di $r$ e della sua coniugata.

b) Discutere se $r$ ha punti reali.

3.7) Sia $r$ la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 7i\,t, y = 3 - (1+i)\,t, z = 2$.

a) Discutere se la retta $r$ è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.

b) Discutere l'esistenza di un piano reale contenente $r$.

3.8) Sia $r$ la retta di equazioni cartesiane $ix - (5+6i)\,y + z + 4 = 0, (5+5i)\,y - (1+i)\,z = -1 - i$. Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale passante per $r$, se tale piano esiste.

Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento.

3.10) Determinare il fascio di rette per $P(2i-1, 5+7i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento. Determinare le rette reali in tale fascio.

3.11) Determinare il fascio di rette parallele al vettore $(5i, 1+i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.

3.12) Determinare il vettore parallelo alla coniugata della retta $r$ di equazione $2x+(3-i)y+2-3i=0$. Discutere inoltre se $r$ è reale e quale sia l'intersezione tra $r$ e la sua coniugata.

3.13) Determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $A(2,-7)$. E' possibile determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $B(2+6i, i-1)$?

ALTRI ESERCIZI (più semplici): Nello spazio complessificato $\mathbf{E_C}$, sia assegnato un riferimento reale $\mathcal{R}$. Si considerino fissati i punti $A(2-7i, 5, i+4)$, $B(1, 12-4i, 9i)$, $D(1-7i, -17, i+9)$, $G(14i-1, 26-12i, 25i-8)$, $H(-4+i, 2+11i, 16-3i)$.

3.14) Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta passante per $A$ e $B$.

3.15) Controllare se i punti $A$, $B$, $G$ sono allineati (cioè se esiste una retta che li contiene tutti e tre).

3.16) Determinare un vettore parallelo alla retta $s$ di equazioni: $3x-(2+i)y+iz=0, 5ix+4z+i=0$. Discutere se la giacitura di $s$ è un sottospazio reale dello spazio dei vettori complessi.

3.17) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta $r$ passante per $P(1,1,1)$ e parallela a $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$. Qual è l'intersezione tra $r$ e l'immagine $\overline{r}$ di $r$ rispetto al coniugio?

3.18) Determinare una equazione cartesiana ed equazioni parametriche per un piano $\alpha$ passante per $A$, $B$, $H$. Tale piano è unico? Determinare inoltre la giacitura del piano $\alpha$ e discutere se tale giacitura è un sottospazio reale dello spazio dei vettori liberi.

3.19) Determinare le coordinate del vettore libero $\mathbf{v}$ individuato dalla coppia ordinata $(A, B)$. Determinare, inoltre, le coordinate del vettore coniugato $\overline{\mathbf{v}}$. Infine, determinare parte reale e parte immaginaria di $\mathbf{v}$.

3.20) Controllare se i vettori $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

3.21) Siano $\vec{u} = (1-i, 4+i, i)$, $\vec{w}_1 = (2+i, 3, 1-3i)$, $\vec{w}_2 = (3+i, 3+3i, -2+4i)$. Discutere se il sottospazio $U = Span(\vec{u})$ (risp., $W = Span(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$) è reale.

3.22) Si consideri l'inclusione naturale $\iota$ dell'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio euclideo nell'insieme $\mathcal{V}_\mathbf{C}$ dei vettori liberi dello spazio complesso. La coppia ordinata $(A, D)$ rappresenta un vettore appartenente all'immagine di $\iota$?

3.23) Sia $r$ l'insieme dei punti di coordinate $(1+i+t(-i), 5+t(2-6i), t)$, al variare di $t \in \mathbf{C}$. Descrivere l'immagine di $r$ rispetto al coniugio.

3.24) Fissati i punti $L(3+i, 2i, 9-3i)$ e $M(3, -1+i, -i)$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{LM}$.

3.25) Controllare se il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e quello generato da $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

3.26) Determinare una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni in $\mathbf{C}^3$ del sistema lineare:

$$\begin{cases} (2-i)x-3y+z=0 \\ 3x+(1+i)y+iz=0 \end{cases}$$