Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 1 a.a. 2013-14 terza settimana

3.1) Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^2$?

$$S_1 = \{(x, y) \mid x \neq y\}, \qquad S_2 = \{(x, y) \mid x - 3y = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y) \mid \text{esiste } t \in \mathbf{R} \text{ tale che } x = 2t, y = -3t\}, \qquad S_4 = \{(x, y) \mid y = 1\}.$$

3.2) Nell'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$, considera l'usuale operazione di somma di numeri reali e il prodotto di un numero razionale per un numero reale.

a) Mostra che, rispetto a queste operazioni, i numeri reali $\mathbf{R}$ formano uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali.

b) Mostra che, dotato $\mathbf{R}$ di tale struttura di spazio vettoriale su $\mathbf{Q}$, il sottoinsieme $\mathbf{Q}$ risulta essere un sottospazio vettoriale.

3.3) Sia $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale reale dei vettori liberi dello spazio.

a) Fissa un segmento $\overline{PQ}$ e considera linsieme W dei vettori in $\mathcal{V}$ del tipo $\vec{AB}$, con $\overline{AB}$ congruente a $\overline{PQ}$. Dire se W è un sottospazio di $\mathcal{V}$.

b) Fissa un piano π e considera linsieme U dei vettori in $\mathcal{V}$ del tipo $\vec{AB}$, al variare di A, $B \in \pi$. Dire se U è un sottospazio di $\mathcal{V}$.

3.4) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$, considera i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Elenca, in funzione di opportuni parametri, gli elementi del sottospazio $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

b) Controlla che $\mathbf{u}_1 \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ ed esprimi $\mathbf{u}_1$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

c) Controlla se $\mathbf{u}_2 \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

d) Determina una opportuna equazione lineare in tre indeterminate $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 0$ tale che $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ sia l'insieme delle sue soluzioni.

3.5) Considera il seguente sistema lineare omogeneo in 3 indeterminate

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Controlla se $(1, 2, -4)$ è soluzione del sistema e se $(1, -4, 2)$ è soluzione del sistema.

b) Elenca tutte le soluzioni del sistema, in funzione di opportuni parametri.

c) Determina un insieme di generatori per il sottospazio delle soluzioni del sistema: denotato con S il sottospazio delle soluzioni, determina cioé opportuni vettori $\mathbf{v}_1$, …, $\mathbf{v}_n$ tali che $S = < \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n >$.

3.6) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^5$, considera i sottospazi vettoriali definiti da

$$U = \{(x_1, x_2, 0, x_4, 0) \mid x_1, x_2, x_4 \in \mathbf{R}\}, \quad W = \{(0, y_2, y_3, y_4, 0) \mid y_2, y_3, y_4 \in \mathbf{R}\}.$$

a) Determina un insieme finito di generatori di U.

b) Descrivi tutti gli elementi di $U \cap W$ in funzione di opportuni parametri.

3.7) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e siano U, W due suoi sottospazi.

a) Mostra che, se $U \subseteq W$ allora U è anche sottospazio dello spazio vettoriale W.

b) Mostra che, se Z è sottospazio vettoriale di U, allora è anche sottospazio vettoriale di V.

3.8) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$.

a) Mostra che $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \subseteq < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} >$.

b) Mostra che, se $\mathbf{v} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$, allora $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > = < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} >$.

c) Mostra che, se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$, allora $< \mathbf{v}, \mathbf{w} > \subseteq < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

d) Quale è il minimo sottospazio di V contenente sia $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ che $< \mathbf{v}, \mathbf{w} >$?