Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 Secondo incontro

1.1) Siano $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e $A, B \subseteq X$ sottoinsiemi. Mostra che

i) L'interno $(\mathring{A})^o$ dell'interno di A coincide con $\mathring{A}$.

ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

iii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. (Descrivi un esempio nel quale l'inclusione è propria)

1.2) In $\mathbf{R}^2$ con topologia euclidea, determina chiusura, interno e frontiera di $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0\}$ (risp., di $S_2 = \{(x, 0) | 0 \leq x \leq 1\}$ e di $S_3 = \{(x, y) | 0 < x, y \leq 1\}$).

1.3) In $\mathbf{R}$ considera la topologia $\mathcal{U}_{cof}$ dei cofiniti (gli aperti non vuoti sono, per definizione, i sottoinsieme con complementare finito).

i) Mostra che lo spazio topologico $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{cof})$ non è metrizzabile.

ii) Mostra che ogni aperto non vuoto è denso in $\mathbf{R}$.

iii) Determina chiusura, interno e frontiera di $[0, 1]$.

1.4) Sia (X, d) uno spazio metrico. Mostra che la chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme S è il sottoinsieme $\{x \in X \mid d(x, S) = 0\}$, ove con $d(x, S)$ si denoti la distanza di x da S, definita da

$$d(x, S) = inf\{d(x, s) | \, s \in S\}.$$

1.5) Mostra che un sottoinsieme di uno spazio topologico è la chiusura di un aperto se e solo se è la chiusura del proprio interno.

1.6) In uno spazio topologico, mostra che un sottoinsieme ha frontiera vuota se e solo se è sia aperto che chiuso.

1.7) In un sottoinsieme X sia assegnata una funzione:

$$\begin{array}{rcl} g : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ S & \mapsto & g(S) \end{array}$$

con le proprietà che

a) $g(\emptyset) = \emptyset$;

b) $S \subset g(S)$;

c) $g(g(S)) = g(S)$;

d) $g(S_1 \cup S_2) = g(S_1) \cup g(S_2)$

per ogni sottoinsieme S, S_1, S_2 di X. Mostra che esiste una unica topologia su X tale che $g(S)$ coincida con la chiusura di S per ogni sottoinsieme S di X.

1.8) Siano assegnate due topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ in un insieme X. Mostrare che risulta essere una topologia anche la famiglia $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ dei sottoinsiemi U di X che sono elementi sia di $\mathcal{U}_1$ che di $\mathcal{U}_2$.