Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 Secondo incontro

1.1) Mostra che il sottoinsieme $S = [-2, -1] \cup [0, +\infty)$ non è compatto in $(\mathbf{R}, top.euclidea)$.

1.2) Mostra che $S = \{(x, 3) | -1 \leq x \leq 3\}$, con topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^2$, è compatto.

1.3) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ un suo sottospazio topologico. Per ogni sottoinsieme S di Y è possibile considerare la chiusura $\overline{S}$ di S in X e la chiusura, che denotiamo con $\overline{S}^Y$, di S in Y nella topologia indotta da X. Mostra che $\overline{S} \cap Y = \overline{S}^Y$.

1.4) Siano (X, d) uno spazio metrico e S un sottoinsieme non vuoto.

a) Mostra che la restrizione d_S di d a $S \times S$ definisce una distanza su S.

b) Mostra che la topologia indotta da D_S su S coincide con la topologia indotta da X in S.

c) Concludi che un sottospazio non vuoto di uno spazio metrizzabile è metrizzabile.

1.5) Sia X un insieme. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X i cui elementi sono l'insieme vuoto e i sottoinsiemi di X ottenuti da X togliendo un numero finito di punti.

a) Mostra che $\mathcal{T}$ è una topologia su X: essa viene detta la topologia dei cofiniti.

b) Mostra che, se X è contiene infiniti punti, ogni aperto non vuoto di $(X, \mathcal{T})$ è denso in X.

c) Mostra che $(X, \mathcal{T})$ è compatto.

1.6) Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è continua se e solo esiste una base $\mathcal{B}$ della topologia di Y tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$,l'antiimmagine $f^{-1}(B)$ è un aperto di X.

1.7) Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se verifica entrambe le seguenti proprietà:

a) f è biiettiva;

b) un sottoinsieme S è chiuso in X se e solo se $f(S)$ è chiuso in Y.

1.8) Siano X un insieme e $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Esiste una unica topologia $\mathcal{U}$ su X caratterizzata dalla proprietà di essere la topologia meno fine tra le topologie su X per cui tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ sono aperti. Verifica che ogni aperto di $\mathcal{U}$ è unione di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{F}$.