

Compllessificazione

2.1) Considera \mathbf{C}^3 come la compllessificazione dello spazio vettoriale reale \mathbf{R}^3 .

- Determina la parte reale e la parte immaginaria del vettore $\vec{v} = (7 - 3i, 11 + 4i, 16 + 54i)$.
Determina, inoltre, il coniugato di \vec{v} .
- Discuti se i vettori $\vec{v}_1 = (2 - i, 3i, 1 + 2i)$ e $\vec{v}_2 = (1 + i, 4 - i, 3 - i)$ sono linearmente indipendenti su \mathbf{C} .
- Discuti se i vettori $\vec{v}_1 = (1 - i, 4 + 2i, -1 + 2i)$ e $\vec{v}_2 = (4 - 2i, 10 + 10i, -5 + 5i)$ sono linearmente indipendenti su \mathbf{C} .
- Discuti se il vettore $\vec{v}_1 = (1 - i, 4 + 2i, -1 + 2i)$ (risp., $\vec{v}_2 = (-20 + 15i, 12 - 9i, 8 - 6i)$) è multiplo di un vettore reale.

2.2) Determina il rango delle seguenti matrici complesse $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 + 2i & -1 + 3i & 3 + i \\ 4i & -4 + 2i & 2 + 4i \end{pmatrix}$ e

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 + i & 1 + 3i & 3 + i \\ 1 - i & 5 + 2i & 2 + 2i \end{pmatrix}.$$

2.3) Siano assegnati uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V e due suoi sottospazi U e W .

- Dimostra che il compllessificato di $U \cap W$ coincide con l'intersezione $U_{\mathbf{C}} \cap W_{\mathbf{C}}$ dei compllessificati dei due sottospazi.
- Se U e W sono in somma diretta, mostra che anche i compllessificati $U_{\mathbf{C}}$ e $W_{\mathbf{C}}$ sono in somma diretta, e che il compllessificato di $U \oplus W$ è $U_{\mathbf{C}} \oplus W_{\mathbf{C}}$.

2.4) Nel piano euclideo \mathbf{E} , sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, R = (\vec{i}, \vec{j}))$, con coordinate x, y . Considera il piano compllessificato $\mathbf{E}_{\mathbf{C}}$.

- Fissati i punti $A(3 + i, 1 - 2i)$ e $B(2, -i)$, determina le componenti in \mathcal{R} del vettore \mathbf{AB} dato dalla classe di equipollenza di (A, B) .
 - Il vettore \mathbf{AB} è un vettore reale?
 - Determina le coordinate dei punti coniugati \bar{A} e \bar{B} e le componenti del vettore $\overline{\mathbf{AB}}$.
 - Determina l'equazione cartesiana reale di una retta reale per A , se tale retta esiste.
 - Determina le coordinate del punto medio di A e \bar{A} .
 - Determina equazione cartesiana e equazione parametrica della retta per A e per B . Tale retta è reale? Interseca la retta coniugata?
 - Determina l'equazione del fascio di tutte le rette per B .
- Determina una coppia ordinata (C, D) di punti immaginari che individua un vettore che ha componenti reali in \mathcal{R} .
- Considera i punti $E(2 + i, 3 - i)$ e $F(2 + 3i, 3 + 2i)$. Determina equazione cartesiana e equazione parametrica della retta per E e per F . Tale retta è reale? Interseca la retta coniugata? È parallela alla retta coniugata?
- Determina il fascio di rette per $P(2i - 1, 5 + 7i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento. Determinare le rette reali in tale fascio.
- Determina il fascio di rette parallele al vettore $(5i, 1 + i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.
- Determina un vettore direttore per la coniugata della retta r di equazione $2x + (3 - i)y + 2 - 3i = 0$. Discuti inoltre se r è reale e quale sia l'intersezione tra r e la sua coniugata.
- Determina una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $A(2, -7)$. Esiste una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $B(2 + 6i, i - 1)$?