2a.1) Considera $\mathbf{C}^3$ come la complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$.

a) Determina la parte reale e la parte immaginaria del vettore $\vec{v} = (7 - 3i, 11 + 4i, 16 + 54i)$. Determina, inoltre, il coniugato di $\vec{v}$.

b) Discuti se i vettori $\vec{v}_1 = (2 - i, 3i, 1 + 2i)$ e $\vec{v}_2 = (1 + i, 4 - i, 3 - i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

c) Discuti se i vettori $\vec{v}_1 = (1 - i, 4 + 2i, -1 + 2i)$ e $\vec{v}_2 = (4 - 2i, 10 + 10i, -5 + 5i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

d) Discuti se il vettore $\vec{v}_1 = (1 - i, 4 + 2i, -1 + 2i)$ (risp., $\vec{v}_2 = (-20 + 15i, 12 - 9i, 8 - 6i)$) è multiplo di un vettore reale.

2a.2) Determina il rango delle seguenti matrici complesse $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+2i & -1+3i & 3+i \\ 4i & -4+2i & 2+4i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+3i & 3+i \\ 1-i & 5+2i & 2+2i \end{pmatrix}$.

2a.3) Siano assegnati uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V e due suoi sottospazi U e W.

a) Dimostra che il complessificato di $U \cap W$ coincide con l'intersezione $U_{\mathbf{C}} \cap W_{\mathbf{C}}$ dei complessificati dei due sottospazi.

b) Se U e W sono in somma diretta, mostra che anche i complessificati $U_{\mathbf{C}}$ e $W_{\mathbf{C}}$ sono in somma diretta, e che il complessificato di $U \oplus W$ è $U_{\mathbf{C}} \oplus W_{\mathbf{C}}$.

2a.4) Nel piano euclideo $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, R = (\vec{i}, \vec{j}))$, con coordinate x, y. Considera il piano complessificato $\mathbf{E}_{\mathbf{C}}$.

a) Fissati i punti $A(3 + i, 1 - 2i)$ e $B(2, -i)$, determina le componenti in $\mathcal{R}$ del vettore $\mathbf{AB}$ dato dalla classe di equipollenza di (A, B).

i) Il vettore $\mathbf{AB}$ è un vettore reale?

ii) Determina le coordinate dei punti coniugati $\overline{A}$ e $\overline{B}$ e le componenti del vettore $\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$.

iii) Determina l'equazione cartesiana reale di una retta reale per A, se tale retta esiste.

iv) Determina le coordinate del punto medio di A e $\overline{A}$.

v) Determina equazione cartesiana e equazione parametrica della retta per A e per B. Tale retta è reale? Interseca la retta coniugata?

vi) Determina l'equazione del fascio di tutte le rette per B.

b) Determina una coppia ordinata (C, D) di punti immaginari che individua un vettore che ha componenti reali in $\mathcal{R}$.

c) Considera i punti $E(2 + i, 3 - i)$ e $F(2 + 3i, 3 + 2i)$. Determina equazione cartesiana e equazione parametrica della retta per E e per F. Tale retta è reale? Interseca la retta coniugata? È parallela alla retta coniugata?

d) Determina il fascio di rette per $P(2i - 1, 5 + 7i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento. Determinare le rette reali in tale fascio.

e) Determina il fascio di rette parallele al vettore $(5i, 1 + i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.

f) Determina un vettore direttore per la coniugata della retta r di equazione $2x + (3 - i)y + 2 - 3i = 0$. Discuti inoltre se r è reale e quale sia l'intersezione tra r e la sua coniugata.

g) Determina una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $A(2,-7)$. Esiste una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $B(2+6i, i-1)$?

2b.1) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1 = (3,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,1)$. Considera lo spazio vettoriale quoziente V/W.

a) Esibisci 5 rappresentanti distinti per la classe $[(2,1,0,3)]$.

b) Controlla e discuti le seguenti uguaglianze: $[\mathbf{0}] = [(-6,1,-5,1)]$; $[\mathbf{0}] = [(2,5,0,1)]$; $[(2,1,0,0)] = [(5,-1,2,3)]$; $[(2,-1,1,-1)] = [(5,4,-2,4)]$.

c) Determina la dimensione e una base di V/W.

d) Verifica se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti in V/W: $\{[(1,0,1,1)], [(2,1,0,0)\}$, $\{[(1,0,1,1)], [(1,1,1,0)\}$.

2b.2) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1, 2x_1 - x_4)$ e denota $W = Ker\, f$. Considera inoltre il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0,0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,0,2,0)$.

a) U e $W = Kerf$ sono in somma diretta?

b) Discuti se $[\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_2]$ in $\mathbf{R}^4/W$.

c) Mostra che $\overline{\mathcal{B}} = \{[\mathbf{e_1}], [\mathbf{e_4}]\}$ è una base di $\mathbf{R}^4/W$.

d) Considera l'applicazione naturale $\overline{f} : \mathbf{R}^4/W \to \mathbf{R}^2$ che fattorizza f. Determina la matrice associata a $\overline{f}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

2b.3) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1+2x_2, 3x_1 + x_4 + x_5)$. Denota con $\pi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5/Kerf$ la proiezione canonica e con $h : V/Ker\, f \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione tale che $f = h \circ \pi$, indotta dal primo teorema fondamentale di omomorfismo.

a) Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^5/Kerf$.

b) Determina la matrice di π rispetto alla base canonica in $\mathbf{R}^5$ e alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$.

c) Determina la matrice di h rispetto alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$ la matrice di h.

d) Discuti se l'applicazione $g : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$, definita da $g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_4 - x_5$ fattorizza attraverso π.

e) Considera il sottospazio U' di $\mathbf{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,-1,1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,-2,-1,-4,0)$. Determina una base e la dimensione di $U = \pi(U')$. Determina inoltre una base di $\pi^{-1}(U)$.

f) Discuti se la posizione $\overline{f} : \mathbf{R}^5/Ker\, f \to \mathbf{R}^2/ < (1,0) >$, $\overline{f}[v] = [f(v)]$, definisce una applicazione lineare.