Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2013-14 secondo incontro

2.1) Verifica se le seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.2) Completa la seguente matrice in modo che sia ortogonale con determinante 1:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & * \end{pmatrix}.$$

Considera l'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ in sè, che ha B come matrice associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio. L'applicazione f è la rotazione antioraria di quale angolo?

2.3) (i) Considera assegnato un sistema ortonormale di riferimento nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$. Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - 5y = 1$.

(ii)Determina le equazioni della rotazione $R_{\mathbf{q},\beta} : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ di un angolo β rispetto al punto $P(2,3)$. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{P,\beta}$, della retta l di equazione cartesiana $x - 5y = 1$ e della retta per P ortogonale ad l.

2.4) Denotiamo con $\mathbf{E}^3$ lo spazio affine numerico $\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^3_{\mathbf{R}}$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard $\mathcal{R}$.

i) Determina le equazioni della rotazione ψ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Determina le equazioni della rotazione φ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Determina le equazioni della rotazione φ di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.5) Sia fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ nello spazio euclideo $\mathbf{E}$. Denota con R^i_α la rotazione di centro O e angolo α attorno all'i-simo versore $\mathbf{v_i}$ del riferimento. Sia φ una rotazione di centro O.

a) Mostra che sono univocamente individuati gli angoli $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \phi < 2\pi$ tali che

$$\varphi(\mathbf{v}_3) = R^3_\phi \circ R^1_\theta(\mathbf{v}_3) :$$

θ e ϕ sono detti rispettivamente *latitudine* e *longitudine* di $\varphi(\mathbf{v}_3)$.

b) Considera $R' = R^3_\phi \circ R^1_\theta$. Mostra che i vettori $\varphi(\mathbf{v}_1)$ e $R'(\mathbf{v}_1)$ sono entrambi perpendicolari a $R(\mathbf{v}_3)$ e formano un angolo ψ, con $0 \le \psi < 2\pi$.

c) Con le notazioni del punto precedente, mostra che

$$R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi(\mathbf{v}_1) = R(\mathbf{v}_1).$$

d) Concludi che: *Ogni rotazione* φ *di centro* O *è della forma*

$$\varphi = R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi$$

dove ϕ, θ *e* ψ *sono angoli tali che*

$$0 \leq \psi, \phi < 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

e con R^i_α *si denoti la rotazione di centro* O *e angolo* α *attorno all'i-simo versore* $\mathbf{v_i}$ *del riferimento. In particolare gli angoli* ψ, θ *e* ϕ *sono univocamente determinati da* φ. Gli angoli ϕ, θ e ψ sono detti angoli *di Eulero*. Le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono quindi di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3.

2.6) Determina la matrice associata (rispetto alla base canonica) all'applicazione bilineare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 5x_1y_3 + x_2y_1 + 5x_3y_1 + 4x_3y_3$. L'applicazione φ è un prodotto scalare?

2.7) Determina la matrice simmetrica associata (rispetto alla base canonica) al prodotto scalare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 + 10x_2y_2 + 3x_1y_3 + +3x_3y_1 + 8x_2y_3 + 8x_3y_2 + 2x_3y_3$. Il prodotto scalare è degenere?

2.8) Considera il prodotto scalare su $\mathbf{R}^3$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determina la dimensione ed una base per ciascuno dei sottospazi $< \vec{e}_1 = (1,0,0) >^\perp$, $< \vec{v} = (1,1,1) >^\perp$ e $< \vec{e}_3 = (0,0,1) >^\perp$.

b) Determina una base ortogonale per la forma φ.

2.9) Considera il prodotto scalare su $V = \mathbf{R}^4$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determina la dimensione ed una base di sottospazi U e W tali che $V = U \oplus^\perp W$, dim W = rango (φ) e la restrizione di φ a W sia non degenere.